数学の本質および価値についての一考察

― 数学教材論の立場から ―

宮　下　英　明

緒　言

数学教材論[註1]は，数学教育学の中でどのように位置づけられ，またどのような形で展開されるべきものなのか。

数学教材論は，本来，数学の意義＝存在理由を問題にする研究領域としての数学論，数学教育の意義＝存在理由を問題にする研究領域としても見直せる数学教育目的論，および数学教育の在り様を規制する外的要因を研究する領域の数学教育環境論等を踏まえた上で初めて打出すことが可能な研究領域の筈である。したがって，これらの研究領域のそれぞれにおいて一応の結論を得ていることが，はじめの問題に対する答えを考えていく上での前提になる。

しかも，ここにもう一つ問題が存在している。それは，認知発達論と数学教材論をどのような関係として捉えるかという問題である。実際，特に算数教育の議論においては，“子どもの発達に応じた教材，カリキュラム”ということが，しばしば言われてきているが，この場合の“発達”は“成熟”に準ずる意味のものとしてあり，そして，かかる観点に立てば，数学教材論は，認知発達論に依存するものとなる。しかし，筆者の見解はこれと異なる。数学教育の議論の上で問題になる概念としての“発達”は，結局のところ，学習の所産としてのレディネスの変容ということに還元されるものであり，したがって，教材を子どもの認知発達に合わせるという発想はそもそも成立のしようがないのだ，というのが筆者の考え方である（〔7〕参照）。特に，一つの数学的主題を指導にあわせて展開・構成する方法も，レディネス変容の色々な在り方に応じて，多様であり得ると筆者は考える。

この考え方に立つとき，数学教材論は，ある知的レベルに最終的に到達するところのレディネス変容を段階的に実現していく学習のための素材を研究する領域として，認知発達論から独立しているものでなければならない。実際，数学教材論を本質的に規制していく研究領域の主たるものとして筆者の考えているものは，先に述べた数学論，数学教育目的論，数学教育環境論である。

そこで本論文ではこのうちの数学論と数学教育目的論の両方に跨るテーマである“数学の本質と価値”ということを，数学教材論の考究の一環として先ず取り上げてみたい[註2]。但し，ここで直接論じようとするものは，“数学の本質と価値”を問題化していくための概念枠組についてである。

（註1）本論では，“教材”というコトバは教授／学習の内容を指すものとする。即ち，教授手段としての“教具”を“教材”の意味に含めない。

（註2）“数学の本質・価値”の問題は，数学教育の議論の上では，“何のために数学を教授／学習するのか”という形で現われる。実際，後者の問題意識から，数学教材の価値，さらに数学一般の価値が問題として意識され，そしてこの数学の価値の問題を扱おうとすれば，否応なく，数学とは何かという問題，即ち，数学の本質の問題にぶつかることになるのである。

I　数学の本質

1－1　本質論と方法論

数学の本質を問題にしようとする場合，先ず，数学に対する＜本質論＞と＜方法論――数学の実践原理・方法を問題にするもの＞とをはっきりと分けて考えておくことが，肝要であると思われる。事実，数学の実践原理・方法に対する立場が，数学を特徴づける観点の如く述べられる――例えば，“数学は思惟可能なすべてのものをその対象とする（学）”というように――ことがしばしばあるように，数学に対する本質論と方法論とは互いに錯綜したものになりがちである。数学本質論での考察の対象は数学の実践の意味＝存在理由であり，数学方法論は本来これについて言及することなくそれ自体完結するものである。

数学の実践原理・方法に対する立場として曾て打出されたものには，公理主義(註1)，形式主義(註2)，直観主義(註3)，構成主義(註4)，構造主義(註5)などがある。規約主義（Conventionalism）(註6)は，数学本質論と方法論の両方に関っている。

現代数学に特徴的な状況というものは，数学に対する方法論的な反省の不可避ということにあろう。実際，理性法則や，自然直観に対する信頼，および数学が自然＝実在の真なる記述であるという認識は，非ユークリッド幾何学の登場によるユークリッド幾何学の意義の相対化とか，様々な数学的パラドックスの現出によって，根底から揺らがねばならなかった。かくして現代数学は，数学方法論の絶えざる問題意識化を宿命づけられて出発したのである。

（註1）非ユークリッド幾何学が登場したり種々の“monstrous”な数学的存在が構成されるに及んで，理性法則や自然直観を絶対視することは，最早不可能になった。そこで，数学を（暗黙に認められた理性法則，自然直観にではなく）はっきりと確定した基盤の上に再構成することと，特に非ユークリッド幾何学を受容する理由を見出すことが，問題意識化され，これへの対応として公理主義は発祥したのである。cf.〔1〕

（註2）数学を異論なきものにするためには有限の立場につかなければならないと考えながら，他方，数学において実無限の概念は不可避であると考えていたHilbertは，数学を解釈の体系としてではなく純粋に記号の体系として捉えることによって，このジレンマを解決しようとはかった。

（註3）cf.〔9〕

（註4）Cantorは無限集合なるものに数学のエッセンスを見て，集合論を展開した。しかし集合論はやがて数学の基礎を構成するものとして見直される。集合論は公理的集合論として形を整えられ，数学の各分野がこれを基礎に公理的な方法で構築されていくことになる。構成主義はこの過程で一つの数学方法論として実践されたものである。

（註5）“数学的構造”の概念化の最も重要な意義の一つは，数学をnon-categoricalに捉え直す新機軸の観点の導入ということであると思われる。

（註6）数学方法論としての規約主義は，例えばつぎの引用文の中に読めるようなものである：

“……the validity of mathematics rests neither on its alleged self-evidential character nor on any empirical basis, but derives from the stipulations which determine the meaning of the mathematical concepts……”（〔4, p.545〕）

また，Poincaréは〔10〕の中で，われわれの空間としてユークリッド的構造のものと非ユークリッド的構造のものとのどちらをとるかはConventionの問題に過ぎないと主張しているが，この認識論的立場は，数学本質論としての規約主義に通じるものである。

1－2　認識形式

数学の本質として筆者が本論で結論しようとすることは，数学とは先づ，‘世界’認識の形式の一つのカテゴリーであること，したがって，それの存在理由は，認識の道具としてのそれの機能という点に本来求められるということである。しかし，数学的認識形式はまた，記号的存在として‘世界’に要素として加わり，‘世界’を拡大するものとなる。そこで，記号的存在として‘世界’内存在であるということが，数学の本質として指摘されるべきもう一つの点となるのである。

本節では先ず，基本概念となる“認識形式”のことから論をおこすことにする。

(1)　認識形式・認識装置

意味化される以前の存在としての“もの自体”は，範疇として概念化することは可能であっ

ても，存在として意識対象になることはない。<もの>は，意味として意識対象化されるのみである。あるいは，意識対象化と意味化とは同時の契機のものである。この意味で，世界に対するわれわれの関わり方は意味的である，ということが出来る。

認識するとは，意味化する認識の枠組を通してものを，'世界'を，見るということである(cf.〔5〕)。したがって，認識は一定の形式に則ったものである。認識は，形式化された認識である他はなく，従うべき形式があるからこそ"認識"なのである。また，このような形で認識形式の概念を導入するとき，'意味'は認識形式に同値の概念となる。

何がしかの形式に則って'世界'を解釈し把握する認識とは，既にレパートリーが定められているゲシュタルト(註)の中の何がしかを'世界'の中に認め，また'世界'を様々なゲシュタルトに分節化する機能である。ここで，認識を機能として記述するために，スタティックな概念の"認識形式"に替えて"認識装置"なる(記述)概念を導入することにしよう。即ち，それは，認識形式を体現するところの，ゲシュタルト抽出の装置の意味である。関数（function）の概念を以って表現するならば，各認識装置fに対してそれが働くところの'世界'が定まり，その'世界'の中の対象xがfにインプットされてxのゲシュタルトがアウトプット$f(x)$として出てくる，というわけである。

(註) 本論文では，T. S. Kuhn が〔6〕の中でつぎのような具合に意味拡張して用いた"ゲシュタルト"というコトバを，借用することにする："パラダイムのようなものが，知覚自体に対する必要条件ではないかとさえ思える。人間に見えるものは彼が見たものだけではなく，彼の既成の視覚的概念的経験が彼に見るように教えるものによっている。"（P. 127）"パラダイムは通常科学で訂正できるものではない。そのかわりに，……通常科学は，究極において変則性の認識を危機に導くだけである。そして，このような変則性や危機は，思索や解釈によってではなく，ゲシュタルトの切り換えのようにかなり急激な出来事によってのみ終熄する。"（P. 138）

(2)認識装置のヒエラルキー

各認識装置fに対し，それのアウトプットであるゲシュタルト全体は，共通してこの認識装置のアウトプットであるということを以って，一つの範疇に括られる。(但し，"認識装置"を発想した経緯からすると，この範疇が或る概念の外延などとして所与であり，かかる範疇化をもたらしているものとして認識装置を逆に概念化したに過ぎないのであるが。）この範疇の表象として記号$\hat{f}$を与えれば，fは$\hat{f}$に同一視でき，また$\hat{f}$の方は一個の**記号的存在**として何がしかの'世界'の要素，即ち別の認識装置のインプット，となる。こうして，認識装置の集合に，一方が他方のインプットになるという関係を導入することができるわけであり，またこの関係によって，認識装置の間には一つのヒエラルキーが形成されることになる。

認識装置の関数的意味に着目すれば，複数の認識装置を組み合わせて新たな認識装置をつくりあげるということが考えられる。この認識装置の組合せにおいては，認識装置間の関係として，一応つぎの三つを基本的なものとして指摘できよう。即ち，二つの認識装置A，Bにおいて，第一に，Aとその他の認識装置の合成(註)としてBがあるという関係，第二に，Aとその他の認識装置の機能を綜合（一般化）する機能のものとしてBがあるという関係，そして第三に，Aを含む複数の認識装置全体が一つの認識装置と見なされたものがBであるという関係である。そして，これらの関係のそれぞれについてもまた，認識装置のヒエラルキーというものが考えられることになる。特に，上の第三の関係によって，認識装置は（恣意的に）色々な規模で考えることが可能になる。(著しくは，一個の認知主体の認識全体を，一個の認識装置で賄われているものと見なせるように。)

(註) 認識装置の合成は，思考の経済化と関わっている。

(3) 認識装置と'世界'

認識装置は，認識の道具（但し，それなくしては認識自体が成立しないところの）であるか

ら，記号的存在としても（(2)），それのインプットになる‘世界’内存在とは次元の異なるものである(cf.〔13, p. 125〕)。しかし，認識装置は記号的存在として‘世界’に付け加わり，‘世界’を拡大する。そしてこの拡大された‘世界’がまた或る認識装置の働く場として意味をもつことになる。認識装置とそれの働く‘世界’とは次元の異なるものであるが，このことと認識装置が記号的存在として‘世界’に付け加わるということの間には，矛盾はない。

1―3　数学的存在の位置

前節では，‘認識’そのものの意味を問題にし，認識形式，認識装置，ゲシュタルトを基本概念として論じてきた。それは，筆者が，‘認識形式’であることが数学の本質であると考えているためである。

数学は経験的実在世界に対する認識形式として出発した。しかし，かかる認識形式は記号的存在として経験的世界に付け加わりそれを拡大することになる（§1-2，(3)）。そしてこの拡大された‘世界’(の或る部分)に対する認識形式としてまた或る数学的認識形式が考え出され，記号的存在としてこの‘世界’に付け加わる。この過程が繰り返されていくことによって，（認識形式としての数学の本質は変わらないが）経験的実在世界と新しく生み出されつつある数学との隔りは一般にますます大きくなっていく。

数学的実践は‘世界’を拡大する。しかし，無秩序に拡大された‘世界’は‘世界’としての資格はないのだから，数学的実践は，合法則的に‘世界’を拡大するものでなければならない。他方，この拡大の方向は，数学の存在的契機の経験的実在世界からはますます離れていく方向である。ここに，数学が自らを展開する‘論理’は，結局は経験的妥当性に裏付けられたものではあっても，必然的に，数学自体において完結するものという色彩を濃くしていく。そして終には，数学は逆立ちの形で定立される。即ち，数学的実践が規約上の営為として規定されるという具合にである。

この段階に至った数学の場合，数学的記号の‘世界’に新たに何がしかのゲシュタルトを浮かび上がらせる認識形式を創作するものとしての数学的実践は，束縛するものが純粋に数学的記号の処理・生産に関する規約のみであることによって，各（数学的）記号の存在論的な意味を考慮せずに済ますことの出来るものとしてある。そしてここに，数学は，自律的な記号体系として生まれ変わったことになる。

勿論，自律的なものになったからと言って，数学が経験的実在世界から独立したわけではない。自らを展開する‘論理’を徹底させる傾向の故に，数学は，“monstrous”な結果を生み出してしまう危険というものにつきまとわれている。したがって，数学の成立基盤あるいは存在的契機への根本的反省というものが，切迫した課題として持ち上がる可能性は常にあると見なければならないのである。

1―4　数学の相対性と客観性

認識形式であることが数学の本質であるということ，しかしまた，数学的認識形式は記号的存在として‘世界’内存在となるということを，前節では述べてきた。

ところで，数学が認識形式である以上，数学の相対性というものが予想されることになる。この数学の相対性は，実際，ユークリッド幾何学の場合には正しかった。事実，かつてはわれわれの空間の絶対的な記述として理解されていたユークリッド幾何学は，今日では空間の相対的な一モデルとして位置づけられるに過ぎない。また，構成主義の実践として行われた数学的対象の捉え直しは，そのまま，従来の認識方法(形式)を相対化するものとしても見ていけるであろう。さらに例えば，無限小をそのまま数学的存在として解析学を展開することが Non-standard Analysis という形で示されているいま，＜無限小＞処理の認識形式としての Weierstrass 流のゲーム的形式も，相対的なものとして理解されなければならないことになろう。(cf.〔12, pp. 134-152〕)

数学が相対的であることは，しかし，数学が客観的であることを妨げない。しかるに，数学

の客観性を根拠に数学の実在論的解釈（プラトニズム）の妥当性を主張する論法に出合うことがある。数学の客観性と数学の実在論とをこのような形で結びつけることは，論理の飛躍である。実際，実在としてではなく相対的記号存在として数学的存在を理解する筆者のような立場においても，数学の客観性は（“認識形式の客観性”という形をとって）テーマとして成立するのである。

1―5　数学の進展

数学はどのように進展していくのか。少なくとも，数学は認識形式の一カテゴリーとして，経験的実在世界に対する認識の形式の変化から超越したものではあり得ないということ，そしてまた，数学が‘世界’認識の形式として実際に機能することで逆に経験的実在世界に対する認識の在り方に影響を及ぼすということを以って，数学の進展は多重構造的なものであるということは言えよう。勿論，この点に全く無関心なままで数学を実践していくことは，可能である。実際，数学は，自律的な記号体系として，経験的実在世界に対する認識の在り方というものから超然としていようと思えばしていけるものである。（ただ，ナンセンスだとして黙殺されることがあるから，完全にこのようなものとしては存続できないのであるが。）このとき，数学的実践とは，純粋に数学的記号を相手に，分析あるいは綜合の観点を与えることになる新しい認識形式を考え出し，その認識形式の含意とか他の認識形式との関係性等を明らかにすることを以って，記号的体系としての数学を増殖(註)・発展させていく営為ということになる。

（註）数学的記号の世界の中に（何らかの意味で）価値あるゲシュタルトを顕わす形式を獲得した途端，ゲシュタルトを生み出すべき別のレベルの記号世界の地平が新たに開けることになる。

Ⅱ　数学の価値

数学教材論の展開方法を規定する教材観は，≪教材を教える≫と≪教材で教える≫の二つをその両極としている。したがって，数学教材論にとって，この両極構図に何らかの形で――しかし，ラディカルな科学的アプローチの方法をとることによって――決着をつけることは，本質的な課題である。そしてこれには，数学的認識形式としての数学教材の価値を明らかにすることが，根本的な問題として含まれている。本章では，この問題にアプローチする目的で，数学の価値を考えていく枠組について考察していくことにする。

2―1　数学価値の研究の枠組

(1)　評価形式

価値とは，あくまで条件づきの価値であるしかない。特に“誰にとって”ということが，価値を言い出すときには先ず明示されなければならない。

価値をあくまで，評価主体に対するものとして表現するためには，“評価形式”の概念，及び記述概念としての“評価装置”の念概，を導入しておくと都合がよいと思われる。実際，評価の機能は認識の機能の特別なものであるから，‘認識’について考えた＜‘世界’―認識装置―ゲシュタルト＞の図式を‘評価’についても適用して，評価装置というものを概念化出来るわけである。

但し，評価が認識の特別なものであるとは言っても，認識形式の系譜を辿れば，評価形式に行き着くと考えられる。実際，評価の過程で起こっていることは，評価対象の属性と一方の需要・欲求・目的との照合および相互の発展的な捉え直しということであるが，評価形式は，これが一つの定式化した記号的処理として定着したものである。そして，この評価形式の慣習化が進行するにつれ，それの本来の評価機能の意味が見えにくくなり，また意識もされなくなる。したがって，現実の認識形式の評価の意味が明らかではなくとも，認識形式は評価形式に還元されるものとして理解できるのである。(註)

（註）村上陽一郎は，“すべての認知がゲシュタルト的なものである”と理解した上で，そこに起こる刺激の選択には“一種の評価関数の如きものが前提され”ているとし，認識行動が評価関数の発動として考えられることを主張する（[8，p. 73]）。

因に，価値の論究にゲシュタルトの概念を導入

している一人である R. Frondizi は，“value is a Gestalt quality, the synthesis of objective and subjective contribution”（[2, p.164]）という具合に，価値とゲシュタルトの二つの概念を結び合わせる。しかし，筆者には，ゲシュタルトの概念のこのような用い方は寧ろ価値の概念を曖昧にするだけのもののように思われる。

(2)　数学価値現象学

数学の価値は，基本的には，数学が価値として発現する現象を遂一押えていくことを通して確定されていくべきである。そのために，数学価値の研究としては，社会生活・社会的活動における数学活用の実態，数学的知識に対する必要意識，数学的能力に対する需要の現状などを把握する数学価値現象学が先ず起こる必要がある。例えば，数学が“色々な領域で幅広く用いられている”ということ自体は数学の有用性の直接的証明となるものではないから，数学価値現象学は，かかる数学の使用が本質的なものかどうか，また数学のどのような分野が実際に応用されているのかということを，明らかにしていかなければならない。

“評価形式”というコトバ(それは，価値を条件づきの価値として表現するために導入されるのであるが）を用いて言うならば，存在する限りの数学評価の形式を列挙することが，数学価値現象学の研究内容ということになる。

これらの評価形式の中には,“数学の価値”というコトバの常識的な意味に合わないものも入ってくるであろう。例えば，試験に出る出ないで数学的内容を取捨選択する数学評価形式（これは確かに現実的なものである）は，その一つである。また，数学信仰というものがもしあるとすれば，それも一つの本質的でない数学評価形式である。しかし，このようなものをも取り混ぜて数学評価装置を先ず網羅してみるということが，数学価値現象学での仕事になる。

(3)　数学の教育的価値の研究——二つの方向

数学価値の研究は，つぎに，数学価値現象学によって提供される価値データを分析・解釈する仕事に移行する。この場合，数学教材論の立場からは，数学的認識形式の各々についてそれの教育的価値を読みとることと，数学の教育的価値の在り様（条件）をカテゴリカルに示すことが，最も興味ある研究テーマということになるであろう。

一つの数学的認識形式 x の教育的価値を調べるためには，先ず，x の価値のレパートリーを知ることが必要である。ところがこのことは，x に対する評価の形式を列挙することに他ならない。次に，これらの評価形式の各々を吟味することになる。そしてこの結果をもとに，x の教育的価値が確定されていくのである。

数学の教育的価値（数学学習を課すことの教育的価値ではない）の条件としては，実用性（実生活や自然・社会学的探究における），教養的価値（文化遺産），美的価値などが，通常挙げられているようである。しかし，価値の条件としてのこれらの意味をもっと本質的に把握することが，試みられるべきであろう。そこで次節では，この点について考察してみる。

2—2　数学の価値の所在

(1)　‘世界’認識と‘世界’の拡大

数学とは認識形式の一つのカテゴリーであるということを前章では述べてきた。したがって，数学の価値は，一応は認識形式としての価値ということになる。それは，‘世界’認識（これは，‘世界’を対象化することでもある）に貢献し役立つという意味の価値である。

しかしここで，‘世界’としては，数学的認識形式が記号的存在として既に含まれているものを考えることができるということを想起しよう（§1-2, (3)）。経験的実在世界を認識する形式としての数学的認識形式の価値ということであれば，それは所謂“数学の実用的価値”(註)として通用しているものである。したがって，‘世界’のうち経験的実在世界から外れた部分を認識する形式としての数学的認識形式の価値は，この“実用的価値”に対して“非実用的価値”と呼ばねばなるまい。“いい数学でありながら，役に立っていないものが，あまりにも多い”([14, p.539])と言うとき，“いい数学”の“いい”は“非実用的価値”，“役に立つ”は“実用的価値”

を，それぞれ指しているのである。しかし，“非実用的価値”とは一体どう理解してよいものなのだろうか。

確かに，ある数学的認識形式が“実用的”かどうかは time-dependent であるとも言える。しかし，だからと言って，数学的実践が来たるべき“幸運な予定調和”のために為されているわけではないし，また，“幸運な予定調和”の可能性が否定されていないという消極的理由から“非実用的”数学が容認されているわけでもあるまい。

数学的認識形式は記号的存在として‘世界’に付け加わる。こうして拡大した‘世界’を認識する形式としてまた数学的認識形式がある。このような具合であるから，数学の“非実用的価値”をあくまでそれの認識形式としての価値ということにすると，話はどうどうめぐりになりそうである。したがって，“非実用的数学”の存在理由は，何よりも先ず，われわれの‘世界’を拡大しているという点に求められねばならない。これが筆者の見解である。

(註) 数学の実用性は，数学的存在の特性に根拠をもつものとして捉えられるとき，哲学的なテーマとなる。(例えば，実用性の理由を存在論的に考察するという方法論が打ち出されるといった具合に。)しかし，この問題の立て方は，逆立ちしていると思われる。実際，数学の実用性は，経験的実在世界の認識の有効な形式なるべく数学が歴史的に構築・洗練されてきたことの予定調和的な結果であり，したがって，存在論的というよりは，寧ろ社会現象論的意味合いの濃い問題なのである。

(2)　‘真理’としての数学

ある人にとっては，数学は，‘真理’の追求という意味づけからその学習（研究）を動機づけられているところのものである。即ち，その人は，‘真理’を追求しているとして数学学習（研究）に自足しているのであり，見返りを得ることを直接の目的として数学を学習（研究）しようとするのではない。

一般に，人は，‘真理’を追求することに自足できるものである。しかしそれはどうしてなのか。結論から言えば，‘真理’というものが，個人あるいは共同体（著しくは，国家）の次元での自己充足，自己実現，あるいは自己同一化ということと関わっているからである。実際，‘真理’とは，権威づけられ而して保証された認識形式のことに他ならない。（それが認識形式として意識されるかどうかということとは，関わりなく。）そしてこのように‘権威’が関わることで，‘真理’は個人あるいは共同体のアイデンティティーを支えるものとなっているのである。より確実な自己同定への欲求が‘真理’追究という行為となって現われる。‘真理’追究が本来，自然な興味・関心に促されるものであるのは，このような欲求が根底にあるからである。

2―3　数学応用の構造

(1)　数学応用の意味とプロセス

数学応用の意味は，“計算”という手段によって，経験的事象の潜勢的性質を顕在化すること――これは見えていないものを先取りして見ることであるから，“予見”と称してよいであろう――である。但し，ここで“計算”とは，インプットが数学的対象であるような数学的認識装置が組合わさって働くことを指すものとする。計算は，所与の数学的な記号システムの含意（implication）を，種々の数学的認識装置の適用によってひき出すことである。これら数学的認識装置の各々は，具体的には，対象変数や関係変数を含む数学的公式（論理式を含む）であり，この変数に定数を代入していくことがこの装置の機能である。なお，“予見”の特別な場合として，未来予見がある。

数学応用は，プロセスとしては，経験的事象の“数学化”，上に述べた意味での計算，そして計算結果の解釈・評定という（大きく分けて）三つの段階を踏んでいる。

経験的事象の数学化においては，経験的事象が先ず（何らかの認識装置を通って）通常“経験的システム”と呼ばれているものに記号変換される。経験的システムは，（数学的認識装置を通って）数学的な記号システムに変換される直前の事象モデルである。そしてこれが数学的記号システムに変えられて，所謂（事象の）数

学的モデルになる。以上が，事象の数学化ということの大まかな内容である。

数学化——数学的モデル化と言っても同じことであるが——の意義は，経験的事象から袂別して計算に道を開くということである。計算による予見では，経験的事象からの袂別は本質的である。実際，事象を操作実験するものであれば，それは“予見”でも何でもない。AからBを導く計算は，Aがそのままに置かれている限りにおいて，Bを予見したと言えるのである。数学が無内容（＝形式的）であるということ[註]が，正しく数学の道具的実用性の必要条件となっているのである。

なお，計算で予見が可能になるのは，筆者の考えでは，計算に用いられる数学的認識装置が，そのような効果を約束するものとして長い歴史の中で経験的に構築されてきたからである。ここで“数学の神秘”をもち出すのは筋違いであろう（人間の英知に対する不思議の念は抱かれて然るべきであるとしても）。実際，予見できる限りのものが予見されるということに過ぎないのであるから。（尤も，何が予見できるかを初めから判っていることは出来ない。そうであるからこそ，“幸運な予定調和”といった感慨も出てくるわけである。）

計算は求答とは限らない。即ち，当て所のない探索のときもある。求答の場合には，計算結果の解釈の仕方を含めて計算の形態が決められる。よって，解釈はこの場合殆ど問題にならない。解釈が問題になるのは，後者の探索の場合であって，数学的記号の形式的操作によって何がしかの結果は出たがこれは一体どういう経験的事実に対応しているのか，という形の問題が起こることになる。

（註）cf. “mathematical certainty of knowledge can be attained only at the price……of complete lack of factual content. ([3, p. 17])

(2)　数学的モデルの意義

既に述べたように，数学的モデルは，（事象を実際に操作したり事象の事実的推移を観察する代わりに）計算によって事象の未来の先取りとか事象の潜勢的な性質の顕在化を為すことを意図して導入されるものであり，したがってそれの第一義は，形式的な計算にのるためにもとの事象から袂別し，具体的な内容を喪失するという点に存している。

計算——求答的あるいは探索的[註1]な——から結論されるもとの事象に関する言説は，厳密には，経験的システムの抽出の仕方，またそれを数学的記号システムと対応させる仕方に依存したものとして，条件的な主張でしかない。したがってそれは，経験的には全く無意味なものとなる可能性がある。

数学的モデル化の考え方は，構造主義の発想と非常に近いもののように思われる。実際，対象世界の基本原理が何かを問いながら構造主義者が求めていた対象把握の枠組とは，いま考察しているところのモデル——但し，数学的モデルとは限らないが——のことに他ならない。数理生物学で考究されているメタファーとしての現象モデル（cf.〔15, p.28〕）などは，構造主義者の考える構造モデルと同質のものであろう。

因に，数学化＝数学的モデル化を論ずる中で“事象を数学の言葉を用いて記述する”という言い方がなされることがあるが，これは誤解を招き易い言い方である。はじめに述べたように，数学化＝数学的モデル化以前に先ず，事象についての或る情報を得ようという目的があり，この目的に沿う限りで[註2]，また許容される条件内で，計算のプログラムと数学的モデル化の方法が考案される。したがって，正しく起こっていることは，“使える”ゲシュタルトを事象から抽出しこのゲシュタルトを数学的記号に変換するということである。これは，“事象の記述”というよりは，ある観点からの“事象の一抽象化”である。

（註１）cf. “The force of the model〔is〕not in its “explanatory” nature……… but in its predictive power………Often, not even the predictive power of the model is important. *The model can have “heuristic” value only*.” (〔11, pp.354, 355〕)（イタリックは筆者）

（註２）特に，もとの事象との類似性ということは，

問題にならない。cf.“理論によってどのようなことが知られるか，ということが問題であって，その理論が実在と一致しているかどうかという問題は無意味である。”（[13, p. 125]）“The social scientist should not demand realism from the mathematician's models but only pertinence.”（[11, p. 371]）

結　語

数学教材を考究する立場から数学の本質と価値を考察していくことを意図して，本論文では，このテーマに関する筆者の見解および問題意識，そして研究の進行を従わせていく枠組について，一通り大枠のままで述べてきた。特に主張してきたことは，認識形式であることが数学の本質であるということ，ただしまた，数学的認識形式が記号的存在として‘世界’の要素に加わり‘世界’を拡大していくということであった。今後の研究課題は，今回大枠で示してきたことのそれぞれを詳しく裏付けていくことである。

引 用 文 献

[1] Dieudonné, J. 現代の公理的方法と数学基礎論，村田全監訳，“数学思想の流れ (3)”，東京図書，1975, pp. 217-238.

[2] Frondizi, R. Value as a Gestalt Quality. J. Value Inquiry, 6 (1972), pp. 163-184.

[3] Hempel, C.G. Geometry and Empirical Science. Amer. Math. Month., 52 (1945), pp. 7-17.

[4] —— On the Nature of Mathematical Truth. *ibid*. pp. 543-556.

[5] Kant, I. 篠田英雄訳，“純粋理性批判（上）”，岩波文庫，1961.

[6] Kuhn, T. S. 中山茂訳，“科学革命の構造”，みすず書房，1971.

[7] 宮下英明　‘保存’認識形式の獲得についての一考察。金沢大学教育工学研究，9号 (1983).

[8] 村上陽一郎　認識・存在・価値。理想，№ 580 (1981), pp. 67-76.

[9] 永井博　“数理の存在論的基礎”，創文社，1961.

[10] Poincaré, H. 河野伊三郎訳，“科学と仮説”，岩波文庫，1959, 第4，5章.

[11] Rapoport, A. Uses and Limitations of Mathematical Models in Social Science. In: L. Gross (ed.), Symposium on Sociological Theory, New York: Harper & Row, Publ., 1959, chap. 11 (pp. 348-372).

[12] 斉藤正彦　“超積と超準解析：ノンスタンダード・アナリシス”，東京図書，1976.

[13] 沢田允茂　“現代における哲学と論理”，岩波書店，1964.

[14] 赤摂也他　現代数学の思想と論理。科学，38 (1968), pp. 533-539.

[15] 寺本英　生物科学におけるカタストロフィの理論。理想，№ 506 (1975.7) pp. 23-29.