量と数の形式（2）

宮　下　英　明

第Ⅱ部――分数――

6　“分数”の形式化

分数とは何か。即ち，分数とはどのような意味のものか。

われわれが生活の上で直接向い合うのは，分数の意味ではなく分数の現象である。そして，この現象の説明になるものをわれわれは意味として認めている。もちろんこのとき，説明になっているかどうかを判断するのもわれわれである。

そこで，分数が何かを問うとなれば，分数の現象としてどのようなものがあるかの確認が先決の問題になる。分数の現象とは，要するに，記号（特に，ことば）としての分数の文脈である。

例えば，“$\frac{2}{3}$”。先ず，“～の$\frac{2}{3}$”という言い回しがある。もとの大きさの$\frac{2}{3}$，特定単位量の$\frac{2}{3}$，というように用いられるものであり，“の”がついていることから“のつきの分数”と言い慣らわされてきている。

つぎに，“$\frac{2}{3}$倍”ないし“$\frac{2}{3}$倍する”という言い回しがある。つまり，“倍つき”である。また，“$\frac{2}{3}$m”，“$\frac{2}{3}$km”等の“単位つき”の分数がある。そして，もちろん，何もつかない分数“$\frac{2}{3}$”がある。即ち，“1と見たときの$\frac{2}{3}$”という言い回しの中の$\frac{2}{3}$，数の計算式の中の$\frac{2}{3}$，$2\div3$のこととして考えられている$\frac{2}{3}$，有理数と言明された$\frac{2}{3}$，等。

さて，分数の意味は，これらの現象を説明するものとして，何であり得るか。それは単一か，あるしは複数のものか。しかしこのような問い自体を無効にするつぎの観点に，われわれは先ず付くべきである。即ち，説明は，説明の形式として，恣意であるということ。

本論文の以下の主題は，《分数とは如何なる形式のことであるか，あるいは如何なる形式として可能であるか――但し，量にこれの基盤を見るときに》という観点に立って，分数の意味の再規定（整理）を図ることである。ところでここに，分数に対する既存の（“お下がり”の）説明形式――言い換えると，分数把捉（理解）の形式――がいくつかある。“割合分数”，“量の分数”，“分割分数”，“操作分数”といったものである。しかしこれらの形式は，分数の形式化というわたしの課題においては問題になるものではない。

実際，分数の形式化は，これら既成の意味形態の“現象学的還元”の意味をもつ。逆の見方をすれば，既成の意味形態は“形式化の中途退却”である。そこで，形式化の一層の徹底は，これらの解体を結果的にもたらす。

わたしが以下に示そうとする分数の形式化は，数学的なものである。即ち，集合ないし数学的構造のことばによる分数の形式の記述が，ここでの主題になる。

“割合分数”，“量の分数”，“分割分数”，“操作分数”は，この意味で，数学的形式ではない。それは，あくまでも生活的なレベルにある印象の表現である。わたしは《生活的な意味を消去して残る形式》をこれらに対置する。対置されるのは，このときの“生活”自体の形式化でもある。しかし形式化は，生活的な

意味の排除のために導入が図られるのではない。《生活的な意味の新たな形での再現》という目的意識があって，形式化は主題になるのである。

7　量の比（倍）としての分数

7.1　整数比としての量の比

分数の一連の現象に対する説明は，量の（連）比の概念へと遡ることで可能になる。但し，整数比としての量の比である（註1）。

ここでの“整数”の意味は，単位事象の反復の回数である。例えば，個々のカテゴリーで考えられる個数，回数，段数など。そして，整数比は，この単位事象の反復の回数の比のことである。

つまり，ここでは整数比を，二つの事象X，Yが共通の単位事象Uの反復として対象化されている場面において考え，X，Yそれぞれに対するUの反復の回数の比のこととする。したがってこのとき，単位事象Uは，二つの事象X，Yに共通の分節単位として特徴づけられる。

“整数比としての量の比”とは，つぎのようなことである。即ち，二つの量x，yに対しxとyの共通の分節単位となる量uを求め，xをuのm回の累加，yをuのn回の累加として表現（対象化）する（註2）。そしてこのとき，量xとyの（連）比が$m：n$であると言う。

“共通の分節単位”は，こうして“公約量”の概念になる。いま，量xのn回の累加$x_{(1)}+\cdots\cdots+x_{(n)}$を$x\times n$と書き表すことにしよう。このとき“公約量（共通の分節単位）”はつぎのように述べられる。即ち，同種の三つの量a，b，cに対しcがaとbの公約量であるとは，$a=c\times m$，$b=c\times n$となるような自然数m，nがとれることである，と。そしてこのとき，aとbは比が$m：n$。つまり，公約量cによって二量a，bを分節化したときのa，bの分節の数がそれぞれいくつかということ，これが量の比の意味になる。またそれ故，“共通の分節単位”が公約量の本質を表すことばになる。

ところで，“整数比としての量の比”ではあるが，整数比は逆に，量の比をそれの意味とする。実際，事象の単位事象の分節化を考えることは，この事象のカテゴリーに量を考えることそのものであると見なせる。そしてこのとき，単位事象の反復の回数の比としての整数比は量の比である。

（註1）　逆に言うと，分数についてのここでの意味遡行は，整数比としての量の比のところまでである。特に，整数比はここでは所与である。

なおこの箇所では，“量”のことばをそれの“生活的”な意味において用いている。量の概念の形式化は3章でなされた。そしてここで言っている“量”は，そこでは“量の差（ベクトル）”の概念になる。

（註2）　同一のカテゴリーの二量a，$b>0$に対して，a，bの最大公約量ならびにaとbの既約な整数比を求めるアルゴリズムとして，ユークリッドの互除法がある。それは，$a>b$として，

$$a=b\times k_1+r_1 \qquad (0\leqq r_1<b)$$
$$b=r_1\times k_2+r_2 \qquad (0\leqq r_1<r_1)$$
$$r_1=r_2\times k_3+r_3 \qquad (0\leqq r_3<r_2)$$
$$\vdots$$
$$(k_i：自然数)$$

のようになる。要するに，余りの間の互除操作である。そしてこの操作で或るnに対し$r_{n-1}=r_n\times k_{n+1}$となったとき，$r_n$は実は$a$と$b$の最大公約量になっている。また，$a$と$b$の整数比$(a/r_n)：(b/r_n)$（既約）が，整数$k_1$，$k_2$，$\cdots$，$k_{n+1}$に対する計算で同時に得られることになる。実際それは

$$k_1+\cfrac{1}{k_2+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{k_n+\cfrac{1}{k_{n+1}}}}}=\frac{s}{t}$$

と計算したときの整数比$s：t$である。

言うまでもないが，“はした”（単位量未満の量）の分数表現が問題になっているとき，単位量とそれとの“余り”に着目してみるというのは，既に，ここで述べたユークリッドの互除法の実質

的な適用である。

7.2　整数比の数学的形式

同一のカテゴリーの二量a，bが二つの公約量c，c'に対し$a=c\times m=c'\times m'$，$b=c\times n=c'\times n'$となれば，$m:n=m':n'$となる道理である。そこで整数比の数学的な記述は，このような対(m, n)，(m', n')を同値とする同値関係の導入という形式をとる。

整数比はここでは量の比をそれの意味としているから，これの記述ということでは，対(m, n)全体の集合として何をとるかという問題がはじめに起こる。このときの集合の選択は，二通りである。即ち，$\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}$と$\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}$である。但しここで，$\mathbb{N}$は自然数（0を含める）全体の集合，$\mathbb{Z}$は整数全体の集合，そして$\mathbb{N}^*=\mathbb{N}^*\setminus\{0\}$，$\mathbb{Z}^*=\mathbb{Z}\setminus\{0\}$である。

前者については説明は不要であろう。後者はつぎのように考える。この場合，対象とする量（体系）は，それの各要素が加法＋に関して対称元（逆元）をもつようなもの――つまり，加法＋に関して群――である。いま量（要素）a，bとbの対称元$-b$，そして自然数nに対し，$a=(-b)\times n$―― $-b$のn回の累加がa――であるときに，$a=b\times(-n)$と定める。こうして“×整数”を定義すれば，整数比$m:n$が，量の比の意味に即きつつ，整数一般について意味をもつことになる。

つぎに対(m, n)全体の集合の上への同値関係～の導入である。この同値関係は，Mを$\mathbb{N}$，$\mathbb{Z}$のいずれかとして，$\mathrm{M}^*\times\mathrm{M}$上でつぎのように定義される：

$$(m, n)\sim(m', n') \Longleftrightarrow m\times n'=m'\times \mathrm{n}$$

これは確かに量の比の意味に即いている(註)。

最後に，対(m, n)の全体$\mathrm{M}^*\times\mathrm{M}$を同値関係～によって類別する。このときの類――商集合$(\mathrm{M}^*\times\mathrm{M})/\sim$の要素――が，個々の整数比の表現になる。

（註）　確かめるべきことは，量a，b，c，c'に関する関係$a=c\times m=c'\times m'$，$b=c\times n=c'\times n'$と関係$m\times n'=m'\times n$が同値であること。

7.3　割合，倍――整数比の導く形式

量に関する整数比の見方の，二つの現実的なバリエーションについて。

一つは，“割合”である。これは，基準に選んだ量uに対する量aの相対的な位置を概念化する一つの形式である。即ち，aとuの（連）比$n:m$を通じて，“aのuに対する割合は$\frac{n}{m}$（mに対するn）”という捉え方である。（基準量との“差”は，相対的な位置の概念化のもう一つの形式である。）

もう一つは，関数ないし作用の意味で考えられた“倍”である。即ち，各量xにxとの（連）比が$m:n$となる量yを対応させる関数，あるいは，xに作用してこのようなyをもたらす作用素（オペレータ）として，“$\frac{n}{m}$倍”が概念化される：

$$x \longmapsto y=x\times\frac{n}{m}$$

（$\frac{n}{m}$倍の作用を$\times\frac{n}{m}$と書き表すことにする。）

“aはuの$\frac{n}{m}$倍”は“aのuに対する割合は$\frac{n}{m}$”の言い換えになる。また，二量a，uにおいて，aのuに対する割合が$\frac{n}{m}$である（aがuの$\frac{n}{m}$倍になっている）とき，aはuの$\frac{n}{m}$であるという言い方がなされる（“のつきの分数”）。

7.4　割合・倍$\frac{n}{m}$の操作的な読み方

二量a，bの比が$m:n$（整数比）であるというのを，われわれは$a=c\times m$，$b=c\times n$となる量cの存在することとして定めた。しかしこのことは，aをm等分する分節単位とbをn等分する分節単位とが等しい，とも読める。そして，さらにこれから，“aをm等分する分節単位のn回の累加がb”（“aのm等分のn個分がb”，“bはaのm等分のn個分”）という読み方が出てくる(註)。はじめの整数比の読み方が関係分析的であったのに対し，これは対象操作的な読み方と言える。（また，静的に対する動的という対比もできよう。）

この読み方の実際的な意義は，二量a，bの関係を“aに対応するb”という観点で見たときの，その対応の仕組みの表現ということである。即ち，対応関係としての割合$\frac{n}{m}$ないし倍$\frac{n}{m}$の

仕組みの表現が眼目である。そしてこの場合，対応の仕組みを述べる形式として操作上の因果が用いられている，ということである。

（註）また，これは，“aのn回の累加をm等分する分節単位がb”（“aのn個分のm等分がb”，“bはaのn個分のm等分”）という読み方と同値になる。

7.5　量測定，単位付き分数

量に関する整数比の見方は，量測定に応用される。但し，小数を測定値として導く測定法（§11.2）に対し，この場合の測定法は，単位量として固定した一つの量$u\neq 0$に対し，各量xをそれがuの何倍になっているかという形で表現するものである：

$$x=u\times\xi \Longrightarrow x\text{の測定値は}\xi$$

さて，分数は倍の表現であることにより，測定値になる。ところで測定値は単位量として何を選んでいるかに依存するから，測定結果は単位量とこの単位量に対する測定値の対で表わされることになる。そしてこの意味で，$\frac{2}{3}$m，$\frac{2}{3}l$，$\frac{2}{3}$kg等の“単位付き＝単位量付き”の分数が現象する。例えば$\frac{2}{3}$mは，“1m”（あるいは“m”）ということばで指示される単位量uと，この単位量に対する測定値$\frac{2}{3}$との対（u，$\frac{2}{3}$）の一表現形態である。

8　代数的構造（有理数）としての分数

8.1　比（倍）の算法

8.1.1　乗法――倍の合成

分数倍の合成は再び分数倍になる。実際，$\frac{n}{m}$倍と$\frac{n'}{m'}$倍の合成は$\frac{n\times n'}{m\times m'}$倍になる。あるいは一般に，$n$と$m'$の公倍数$L$，$L=n\times l=m'\times l'$である整数$l$，$l'$に対し，$\frac{n\times l}{m\times l}\times\frac{n'\times l'}{m'\times l'}=\frac{n'\times l'}{m\times l}$倍になる。即ち，量$x$に対し，$x$を$m\times l$等分する分節単位を$y$とおくと，$x$の$\frac{n}{m}$倍は$y$の$l\times n=l'\times m'$倍。それのさらに$\frac{n'}{m'}$倍は$y$の$l'\times n'=n'\times l'$倍で，これは$x$の$\frac{n'\times l'}{m\times l}$倍である。

いま，倍ξと倍ηの合成を積$\xi\times\eta$の形で書くとしよう。

分数の意味を量の比まで遡行するとき，分数の積の意味はこのような倍の合成である。この計算では，上に示したように，分数の和の場合（次節）と同様，通分が本質的である。即ち，一方の分数の分子と他方の分数の分母に関して“通分”がなされるわけである。

実際，倍は整数の（二項）関係（グラフ）であり，二つの関係（グラフ）ξ，ηの合成$\xi\times\eta$（$=\eta\circ\xi$）は，$(p, q)\in\xi$，$(q, r)\in\eta$となるqが存在するような対（p，r）の属する関係（グラフ）として定義される。そして，対（p，r）を得るのにqを介在させるステップが計算上では“通分”になるわけである。

8.1.2　加法――倍の和

量の和の概念は，倍の和の概念を導く。

各量xに対し，それの$\frac{n}{m}$倍と$\frac{n'}{m'}$倍の和を対応させる関数f：

$$x\longmapsto x\times\frac{n}{m}+x\times\frac{n'}{m'}$$

を考える。fは分数倍の関数になる。詳しく言うと，mとm'の公倍数M，$M=m\times k=m'\times k'$である整数k，k'に対し，fは$\frac{k\times n+k'\times n'}{\mathrm{M}}$倍の関数である。

実際，量xに対し，xをM等分する分節単位をyとすると，$x\times\frac{n}{m}$はyの$k\times n$個分で，$x\times\frac{n'}{m'}$はyの$k'\times n'$個分。よって$x\times\frac{n}{m}+x\times\frac{n'}{m'}$は$y$の（$k\times n+k'\times n'$）個分，結局，$x\times\frac{k\times n+k'\times n'}{\mathrm{M}}$である。

倍関数ξ，ηに対する倍関数

$$x\longmapsto x\times\xi+x\times\eta$$

を，ξとηの和$\xi+\eta$の形で表すことにしよう。

量の意味を量の比まで遡行するとき，分数の和の意味はこのような倍の和である。

8.2　有理数体

比（倍）の合成，和を分数の内算法――乗法，加法――へと形式化するとき，“数の体系”の概念が起こることになる。

“数の体系”内要素としての分数は，新たに“有理数”の名が与えられる。そして，この有理数の体系$\mathbb{Q}$の構造として体が抽出される。但し，正（$\geqq 0$）の有理数の体系$\mathbb{Q}^+$については，$\mathbb{Q}$の構造の$\mathbb{Q}^+$への制限を考えていく。

8.3　量としての分数

有理数体$\mathbb{Q}$に対して量としての数（$\mathbb{Q}$，$\mathbb{Q}$，$\mathbb{Q}$）＝（$\mathbb{Q}_1$，$\mathbb{Q}_2$，$\mathbb{Q}_3$）が定義される（§4.4.1)。ここでこれの要素を“分数”と読めば，“量としての分数”が概念化される。但し，量の身分を直接担うのは，$\mathbb{Q}_1$の元か，$\mathbb{Q}_1=\mathbb{Q}_2$と見たときのこれの元である。

量としての分数の計算は，量計算(§5.3)ということで，比（倍）としての分数——$\mathbb{Q}_3$の元——の計算（既知）に還元される。

先ず量としての分数の和$\frac{n}{m}+\frac{n'}{m'}$は，$\frac{n}{m}$，$\frac{n'}{m'}\in\mathbb{Q}_2$の$\mathbb{Q}_2$における和であり，それは

$$\frac{n}{m}=1\times\frac{n}{m},\ \frac{n'}{m'}=1\times\frac{n'}{m'}$$

の分解から$=1\times(\frac{n}{m}+\frac{n'}{m'})$となり，よって倍としての分数の和$\frac{n}{m}+\frac{n'}{m'}$の計算に帰着する。

つぎに量としての分数の積$\frac{n}{m}\times\frac{n'}{m'}$であるが，このときには，最も一般的な形にしておく意味で，三つの量（体系）(Q_i，D_i，$\mathcal{N}$）＝（$\mathbb{Q}$，$\mathbb{Q}$，$\mathbb{Q}$）（$i=1$，2，3）を考え，複比例関数：$D_1\times D_2\longrightarrow D_3$を考える（註）。即ち，$\frac{n}{m}$，$\frac{n'}{m'}$をそれぞれ$D_1$，$D_2$の元と見て“×”を，条件　$1\times1=1$で規定される複比例関数：$D_1\times D_2\longrightarrow D_3$として理解する。このとき$\frac{n}{m}\times\frac{n'}{m'}$の計算は，

$$=(1\times\frac{n}{m})\times(1\times\frac{n'}{m'})$$
$$=1\times(\frac{n}{m}\times\frac{n'}{m'})$$

から，倍としての分数$\frac{n}{m}$，$\frac{n'}{m'}$に対する$\frac{n}{m}\times\frac{n'}{m'}$の計算に帰着する。

（註）　量の複比例関数のカテゴリーには，量の倍も含まれる。

9　分数の既存の読み方について——あるいはそれへの批判

9.1　“割合分数”——倒錯視（1）

“1と見たときの$\frac{2}{3}$”という文脈に在る“$\frac{2}{3}$”，このような分数に対して“割合分数”のことばが用いられている。少なくとも，“割合分数”のことばの典型的な用い方はこのようなものである。以下，この意味での“割合分数”の概念を，結果と原因を取り違える誤謬として批判する。

割合は“1と見たときの$\frac{2}{3}$”で表現されているのであり，“$\frac{2}{3}$”で表現されているのではない。では，“1と見たときの$\frac{2}{3}$”における“$\frac{2}{3}$”は，それ自体何ものであるのか。この“$\frac{2}{3}$”の意味は，“1と見たときの$\frac{2}{3}$”を割合の表現として——即ち，“$1:\frac{2}{3}$”のこととして——成立させるところの意味である。それは，量である他はない。（他に何であり得るか？）“1と見たときの$\frac{2}{3}$”の意味は量1に対する量$\frac{2}{3}$の割合である。“割合分数”$\frac{2}{3}$は，量としての分数の$\frac{2}{3}$なのである。

そこで，“1と見たときの$\frac{2}{3}$”の中の$\frac{2}{3}$についての意味遡行は，量$\frac{2}{3}$の意味に至る。そして量$\frac{2}{3}$の意味は，量1の$\frac{2}{3}$の量であり，かつ，この後の“$\frac{2}{3}$”は比＝倍としての$\frac{2}{3}$である。

量$\frac{2}{3}$と比$\frac{2}{3}$では，前者が後者に従う。即ち，量$\frac{2}{3}$は量1と比$\frac{2}{3}$の概念の上に定立される。比$\frac{2}{3}$の方は公約量の概念から定立されるのであり，量$\frac{2}{3}$に拠るのではない。

“1と見たときの$\frac{2}{3}$”は，きちんと言うと，“量1に対する，量1に対する$\frac{2}{3}$の量の割合”である。そしてこれは単に割合＝比の$\frac{2}{3}$のことである。

割合を“割合分数”——以上見てきたように，これは実は量としての分数——で語ることは，表現の重複である。そしてこの表現の重複は，原因を結果と取り違える倒錯と対になっている。

9.2“量の分数”——倒錯視（2）

“量の分数”とは，つぎのような形で語られている分数のことである：“$\frac{2}{3}$本，$\frac{2}{3}$kg，$\frac{2}{3}l$等の抽象が$\frac{2}{3}$である。”

しかし，$\frac{2}{3}$本，$\frac{2}{3}$kg，$\frac{2}{3}l$それ自体は，特個的な量であり，これらのそれぞれに対する“$\frac{2}{3}$本”，“$\frac{2}{3}$kg”，“$\frac{2}{3}l$”等の表現は，恣意的に選ばれた測定法の結果に過ぎない。したがって，“$\frac{2}{3}$本，$\frac{2}{3}$kg，$\frac{2}{3}l$等の抽象が$\frac{2}{3}$”という言い方がナンセンスでないならば，$\frac{2}{3}$本，$\frac{2}{3}$kg，$\frac{2}{3}l$

を表現に先行する即自的な量と読んではならない。しかしこのときには，“$\frac{2}{3}$”は表現“$\frac{2}{3}$本”，“$\frac{2}{3}$kg”，“$\frac{2}{3}l$”等の抽象でなければならず，特に，量ではあり得ない。

そもそも，量$\frac{2}{3}$は，$\frac{2}{3}$本，$\frac{2}{3}$kg，$\frac{2}{3}l$といった異なるカテゴリーの量（要素）から抽象されるのではない。それは，固定した一つの量カテゴリーを形式化することから出てくる。“$\frac{2}{3}$本，$\frac{2}{3}$kg，$\frac{2}{3}l$等の抽象が（量）$\frac{2}{3}$”は誤りであるが，例えば，“（量）$\frac{2}{3}$は$\frac{2}{3}$kgの抽象である”は正しい。但し，どのような抽象化かということがここで問題なのである。

“（量）$\frac{2}{3}$は$\frac{2}{3}$kgの抽象”と言うとき，自己言及——自分（$\frac{2}{3}$）を用いて自分（$\frac{2}{3}$）を述べる——が起こっている。（これとは種類が異なるが，“割合分数”のときにもわれわれは一つの自己言及を見た。）この自己言及はつぎのように言い直される——そしてこの言い直しで，自己言及のパラドックスが見かけ上のものとして解除される。即ち，“$\frac{2}{3}$とは，量1に対する割合が，1kgに対する$\frac{2}{3}$kg（＝1kgに対する割合が$\frac{2}{3}$の重さ）の割合（＝$\frac{2}{3}$）に等しい量のこと”，と。勿論，ここで“量1”が言えるのは，それ以前に，重さ（体系）の構造の普遍対象化として数＝〈量としての分数〉が概念化されている限りにおいてである。

さて，かつて“割合論争”なるものがあったと聞く。“割合分数”，“量の分数”に対するわたしの把捉が見当違いのものでないならば，“割合論争”とは二種類の倒錯視の間の論争でしかない。実際，皮肉なことに，“割合分数”派の言う“1と見たときに$\frac{2}{3}$”の“$\frac{2}{3}$”は量であり，“量の分数”派の持ち出す“$\frac{2}{3}$本”，“$\frac{2}{3}$kg”，“$\frac{2}{3}l$”のような単位付き分数の$\frac{2}{3}$は，比＝割合である。つまり，“割合分数”派は実質“量の分数”を以って“割合分数”を主張し，“量の分数”派は実質“割合分数”を以って“量の分数”を主張していたのである。

9.3“分割分数”

“分割分数”とは，分数の既存の読みのうちでも特に意味不明なものであるが，凡そつぎのような形で語られる分数である：“$\frac{2}{3}$とは，1を3等分した2つ分。”

等分して合併する操作の対象としてのこのときの1は，量でなければならない。そして$\frac{2}{3}$も，この操作の結果として，当然量でなければならない。

さて，$\frac{2}{3}$は，われわれに見えているところのものとしては，この量$\frac{2}{3}$の表現である。しかし2，3は，それ自体としては，一つの操作を表現している。そしてその操作は，倍の概念へと形式化されるようなものである。即ち，2は2倍（$\times 2$），3は3倍（$\times 3$）——但し，／3で3倍の逆（$\times 3^{-1}$）——に。

表現“$\frac{2}{3}$”の中には量を指示するものはない。しかし，それは量の表現であることになっている。表現している量は，（1（量）$\times 3^{-1}$）$\times 2$。そしてこの量を倍2，3の対の“$\frac{2}{3}$”において読ませるために，量1を補わせる。しかしそれは表現に反映させない。これが“分割分数”の在り様である。

結局，“分割分数”は形式として自立していない。量を表現しているとされながら，量を指示する形式を備えていないのである。しかしわれわれは，通常この形式の不備を看過する。それは，形式の外部での意味補足の行為が，逆にこの形式の不備を隠蔽することにはたらいているからである。

9.4“操作分数”

“三等分してそのうちの二つ分を寄せる”の意味で語られる“$\frac{2}{3}$”，このようなのを“操作分数”と呼んでいる。“操作分数”は操作の表現である。そしてその操作は，量自体に対するものではない。量をその上に考えている〈もの〉に対する操作である。

“操作分数”が意味をもつのは，つぎのような場面においてである。先ず，集合（対象のカテゴリー）Xで，各対象の分割（特に，等分割）と二対象を寄せることが何らかの意味で規定されているようなものがある。つぎに，Xの対象に関する同型（合同）の概念があって，同

型が一つの量（要素）を規定するような具合になっている。

即ち，形式化して言えば，X上の同値関係（合同）≡があって，X／≡は量の形式を備え，実際各$x\in X$についてxの属する同値類$[x]$がxの量と読まれる。さらに，x，$y\in X$を寄せた結果が$z\in X$のときに，$[x]+[y]=[z]$が成立している。

いま，$x\in X$を$u_1\equiv u_2\equiv u_3$へと三等分し，そのうちの二つu_1，u_2を寄せたときの結果が$y\in X$であるとする。$u=[u_1]$（$=[u_2]=[u_3]$）とおくと，$[x]=u\times 3$，$[y]=u\times 2$より$[y]=[x]\times\frac{2}{3}$。こうして，“三等分してそのうちの二つ分を寄せる”操作と“$\frac{2}{3}$”の対応が結果的につくことになる。

“操作分数”は，集合Xの元に対する作用素である。そしてXは量ではない。したがって，それに“分数”の名を与えることは，分数本来の意味からの逸脱である。この逸脱はわれわれに容易に意識されないが，それは，Xの元に対する作用素を量X／≡の元に対する作用素に同一視（あるいは混同）することが，われわれにとって自然なものになっているからである。その理由は，われわれの生活経験——生活上，この同一視（混同）に裏切られたことがないという——に帰すべきであろう。逆に，それだけ“操作分数”は構造隠蔽的なものとして生活上機能しているということである。

なお，量の作用素との混同とは言っても“操作分数”は先ずここに述べた形の集合Xを必要とするわけであるから，このような集合Xが考えられない例えば温度や速度のような量に関しては“操作分数”は生じない（註）。

（註）因に，“外延量”と“内包量”という概念対が既存のものにあるが，“加法的”の基準で語られている限りでは，それは有るよりは無い方がよい概念である。実際，“内包量”においては，〈もの〉のレベルでの“加法的”の基準を考える前提——即ち，Xにおける“分割”と“寄せ”の概念——がそもそも欠落している。また，“加法的”の基準を量自体に及ぼせば，“内包量”も加法的である以上，ここでも“外延量”に“内包量”を対立させることはできない。

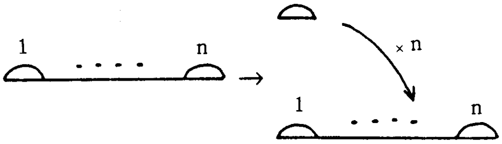
10　分数の中への整数の埋め込み

10.1　分数の中への整数の埋め込み

自然数の意味（本質）は系列(sequence)である。そしてこれの応用として，計数がある。これに対し分数の方は，量の比（倍）を意味とする。そして応用として量の測定がある。

さて，計数と測定の構造的な面に着目するとき，計数を測定の一特殊とする見方が生まれる。そしてこれに応じて，計数に応ずる個数，回数などの概念が，量として捉え直される。

即ち，こうである。分節単位の数え上げとしての計数は，分節単位に対する倍（自然数倍）を求める測定として特殊化される：



そして，個数，回数などは，離散量(§3.1)の一種として統括される。またこのとき，自然数nに対するn倍の構図が$\frac{n}{1}$倍の構図と同じ（上図）であることから，自然数nと分数$\frac{n}{1}$の同一視がなされる。

したがってここで強調しておきたいのは，意味的には自然数倍の概念の拡張として分数倍があるのではないということである。実際，《二量を公約量で区切ってそれぞれの分節数を数える》が分数の概念化の本質的なステップとしてあるわけであるが，自然数倍はこれとは無縁である。

さて，自然数倍の概念は整数倍の概念に普通に拡張される。このとき，ここまでに述べたことは，一つの量（体系）Qに関する倍としての整数，分数について，前者を後者の中へ

$$\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Q}=(\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z})/\sim,$$
$$n\longmapsto[1,n]=1:n$$

の形で埋め込むということである。ところでこの形式は，代数的構造（“数の体系”）ないし

量としての整数，分数（有理数）についても意味をもつ。実際，整数・分数＝代数的構造の場合については，これは周知の議論になる。またその上で整数・分数＝量の場合にも意味をもつということは，§3.3で考察した内容の中にあったものである。

10.2　分数＝整数÷整数

整数を分数の中に埋め込むとき，分数$\frac{n}{m}$＝整数n÷整数mの等式が成り立つことになる。

ここで，“÷”は分数に関する乗法の逆算法を表わす。即ち，$n \div m$の意味は，$m \times \alpha = n$となる分数αである。そしてこのαが$\frac{n}{m}$であることを述べているのが，上の等式である。

“×”の意味は，分数の解釈――量の比（倍），有理数，量――によって異なる。分数＝量の比（倍）であれば合成，分数＝有理数であれば乗法，分数＝量であれば複比例関数（テンソル積）である。そして，“$\frac{n}{m} = n \div m$”は，このそれぞれの解釈において意味をもつ。

11　“小数”形式

11.1　自然数

11.1.1　序列，自然数

これまでに，“数”は量の比＝倍関係――厳密には，量（体系）（Q，D，$\mathcal{N}$）における$\mathcal{N}$ないしその要素――の意味づけをされ，そして代数的構造としての数および量としての数が，この概念から導かれた。ところで，この比＝倍関係としての数には別の種類の数が内包されていた。即ち，“整数比”と言うときの“整数”それ自体である。この文脈では整数は累加の回数として現象していたわけであるが(§7.1)，帰するところは，〈単位事象の反復の回数〉である。

“（単位事象の反復の）回数”の形式は“序列(sequence)”に帰する。“序列”とは，Peanoの公理の規定するところの形式，即ち，《“はじめ”，“はじめのそのつぎ”，“はじめのそのつぎのそのつぎ”，……》の形式のことである。そしてこの形式の実体化が，例えば日常生活的には指を一定の順序で折る／伸ばす行為とか“数唱”であり，数学的には自然数――但し“順序数”として語られるところの――ないしそれの拡張としての整数の概念である。

対象をこの序列の形式で捉えることが，対象の序列化である。そこでは，先ず対象が分節化される。但しそれは，結果としての分節が互いに“単位”として同等視されることになる限りにおいてのものである。そして，分節の集合が序列の形式に沿わせられる。“回数”，即ち，“単位事象の反復の回数”が形式として“序列”に帰せられる所以である。

序列は対象に備わっていたのではない。われわれが一方的にそれを対象に投げかけたのである。また，一般的形式として“序列化”とか“数詞列に沿う対象の分節化”があるわけではない。対象に応じた特個的な，かつ歴史的／文化的な形式があるのみである。

“はじめ”，“はじめのそのつぎ”，“はじめのそのつぎのそのつぎ”，……という具合に“そのつぎ”を重ねる場合，そこには一つの約束があった。即ち，新たに一つの“そのつぎ”が重ねられたときのそれは，それ以前のどれとも異なるとされる，ということである。序列はこうして線形である。そしてこのことによって，(序列の実体化の）自然数は，序列化の形式以外の用途を同時にもつことになる。即ち，〈識別〉である。例えば“背番号”であるが，それの本来の機能は識別であって，先後をつける意味合いはない。

11.1.2　計数

数（かず）を表現する数は，それ以前に，計数の単位行為が繰り返される回数の表現である。実際，自然数の列1，2・・・・と直接に結びつけられているのは，計数の対象ではなく，計数の単位行為の時間的な継起である。そして，数（かず）としての数――計数での“そのつぎ”の行為が無意味になったときの最後の自然数――で直接表現されているのは，計数の単位行為の反復された回数である。

“計数”を経て“数（かず）”の概念がある。数（かず）の概念から計数の契機を外すことは

できない。

例えば，“数（かず）”を倍の概念で説明することはできない。実際それは，“n個は一個のn個分”というように循環論法になる。

また，１対１対応の概念から数（かず）の概念をおこすこともできない。実際，その説明も，循環論法になる。例えば，鳥二わと石ころ二個を１対１対応させること――そもそもどうしてこんな操作が発想できたのか。両者を“数（かず）”のレベルで同質化してしまう認識の形式が既に存ったからである。

さらに，〈“１対１対応”の規準による分類が完了した世界〉の概念を所与としても，説明は成立しない。そもそも，“n個”は存在論的な事実ではないのである。存在論的に考えるならば，n個のものが存る保証は何もない。そこで，《n個のものが無いとしたら“n個”という数（かず）は無くなるのか》，という素朴な疑問も立つ。これは“n個”を存在論的に考えることから来るナンセンスである。“n個”の問題は，存在論的ではなく，あくまでも認識論的なのである。

この認識に立つとき，“１対１対応によるn個”の擁護はつぎのような形をとる他ない：《対象は高々論理の上での記号的存在なのだから，n個の要素から成る集合を構成すればよい》。しかし，この考え方の中に既に“n個”の概念が登場してきている。その“n個”はどのようにして知ることができるのか。ここでやはり“計数”を出さねばならなくなる。

11.1.3　序数と基数

序数（順序数）と基数（集合数）を，ともに量の形式で捉えてみる。即ち，序数（$\mathbb{N}_o$，$\mathbb{Z}_o$，$\mathbb{Q}_o$）と基数（$\mathbb{N}_c$，$\mathbb{Z}_c$，$\mathbb{Q}_c$）をつぎのように定義する。集合として$\mathbb{N}_o=\mathbb{N}_c=\mathbb{N}$，$\mathbb{Z}_o=\mathbb{Z}_c=\mathbb{Z}$，$\mathbb{Q}_o=\mathbb{Q}_c=\mathbb{Q}$，しかし$\mathbb{N}_o$の元を“序数”，$\mathbb{N}_c$の元を“基数”と読む。また，$\mathbb{Z}_o$の元は，序数の差ベクトルの意味で，“いくつ後”，“いくつ先”と読まれ，$\mathbb{Z}_c$の元は，基数の差ベクトルの意味で，“いくつ増”，“いくつ減”と読まれる。また，$\mathbb{Q}_o$，$\mathbb{Q}_c$の元は，それぞれ序数，基数の差ベクトルの比である。

この形式化に応じて，序数と基数のそれぞれに関する計算は量計算になる。特に，序数（$\mathbb{N}_o$の元）同士，基数（$\mathbb{N}_c$の元）同士の足し算，掛け算は定義されない。

序数と基数は，同型な離散量である。実際，この二つの別は，（$\mathbb{N}$，$\mathbb{Z}$，$\mathbb{Q}$）の元に対する読み方の違いに過ぎない。両者の別が問題になるのは，〈意味〉の次元においてである。前節，前々節での考察――序列の形式，計数，数（かず），および１対１の対応づけについて――は，この次元に属している。

11.2　小数

11.2.1　計数単位，単位システム，小数

計数を，対象の分節化と分節の数え上げという二つの段階で見てみる。このとき，数え上げられる個々の分節は，等質なものと見なされているが，この等質化の形式が〈計数単位〉である。

ビーズを数える場合を考えよう。これが“一つ，二つ，······”と数えられる場合には，対象の分節化は，個々のビーズをそのままに区別する“自然な”分節に従っている。したがって，ここでは“分節化”は意識されないのが普通である。しかしまた，ビーズを二つずつあるいは五つずつというように数えることがあるように，われわれは“自然な”分節をもつものに対してもその“自然な”分節に専ら従っているわけではない。そしてこの場合には，“ビーズ二つ”ないし“ビーズ五つ”が，それぞれ〈単位〉として抽象され，この単位＝計数単位の数が数えられるということで，ビーズが数えられる。

さて，この場合に見るように，計数単位は量表現の単位と対立してある。しかしこの対立は，所詮二つの恣意性の間のものであり，決定的なものではない。実際，二つの恣意性は一つのものになる。即ち，量表現単位の相対化がなされて，量表現単位が計数単位の中に解消される。

これと同時に，計数／量表現の単位が複数化

し，固定化し，かつ階層化（システム）化する。複数化の理由は，最良の単位が計数／量表現を最も容易にするものであり，したがってどれが最良かはケース・バイ・ケースであるということ。固定化の理由は，計数／量表現がそもそも共同体的なものであるということ。そして階層化（システム化）は，異なる単位による計数／量表現の比較が可能かつ容易であるために必須である。

単位群はつぎのような形式で階層化（システム化）される。即ち，単位は，上位一下位の関係で線形に順序づけられる——……第2上位単位，第1上位単位，基本単位，第1下位単位，第2下位単位，……。そして，上位一下位の関係の条件は，《上位単位は下位単位によってきっちり分節化される》である。

さらに，この単位システムはつぎのような規則に従って用いられる。即ち，一つの単位に関して対象を分節化して生じた“はんぱ”はこの単位の一つ下位の単位に関して分節化される；そしてこれの繰り返し。

そこで単位システムによる量測定であるが，それは，一つの単位によって対象を分節化する度毎に，そのときできた分節を数え上げる，そしてこれを上位単位から下位単位へと順次行っていく，という形をとる。その結果，“……，第2上位単位がk_2個，第1上位単位がk_1個，基本単位がk_0個，第1下位単位がk_{-1}個，第2下位単位がk_{-2}個，……”，という量表現を得る。

そこで最後の課題は，この表現の洗練である。そして，“小数”はこのような文脈で登場する。

この計数表現は，“n進法位取り”の原理の上に立つ。即ち，先ず単位システムが，任意の隣り合う上位単位，下位単位において後者が前者をn等分する，というようになっている。そして，単位の系列：……，第2上位単位，第1上位単位，基本単位，第1下位単位，第2下位単位，‥‥に従って各単位の個数を記していく。この結果が，“小数”

$$\cdots\cdots k_2k_1k_0.\ k_{-1}k_{-2}\cdots\cdots$$

である。ここで“小数点”は，基本単位に対応する数を示す目印という意味以上のものではない。

11.2.2　数／量としての小数

$Q=(\mathrm{Q},\ \mathrm{D},\ \mathcal{N})$を量（体系）とし，$\mathrm{S}=\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$を$\mathrm{D}^+$における$n$進の単位システムとする。但し，$u_0$が基本単位で，各$n$に対し$u_n$が$u_{n-1}$の上位単位。

各n進小数αに対し，Sに関してαを測定値とするDの元を対応させる写像は，n進小数全体の集合F^+からDの中への単射である。さらに，Dの$\mathcal{N}$上への双射：$x\longmapsto(u_0:x)$をこれに合成して，F^+から$\mathcal{N}$の中への単射——jとする——が得られる。いまこのjによって，F^+を$\mathcal{N}$に埋め込むことを考えよう。するとこれは，小数と分数の周知の同一視——例えば，10進小数$3.14=\frac{314}{100}$——を行なったことに等しい。

また，n進小数αに対し，$-\alpha$を$j(\alpha)\in\mathcal{N}$の対称元$-j(\alpha)$として定めることで，“負”の小数が定義できる。逆に，いままで考えてきた小数を，正の小数とする。正および負のn進小数の全体をF_nで表わすとしよう。

$\mathrm{F}_n\subset\mathcal{N}$であることによって，Dの元に対する小数倍が定義される。このとき，Sに関してn進小数$\alpha\in\mathrm{F}^+$を数値とするDの元がxであるということが，端的に$x=u_0\times\alpha$と表現できる。そこで一般に，$x\in\mathrm{D}$，$\alpha\in\mathrm{F}_n$に対し$x=u_0\times\alpha$であるとき，αはSに関するxの数値であると言うことにする。

いま，$\mathrm{D}_n=\{u_0\times\alpha\mid\alpha\in\mathrm{F}_n\}$とおき，また，任意に固定した$O\in\mathrm{Q}$に対し，$\mathrm{Q}_n=\{\mathrm{O}+x\mid x\in\mathrm{D}_n\}$とおく。$(\mathrm{Q}_n,\ \mathrm{D}_n,\ \mathrm{F}_n)$は，$(\mathrm{Q},\ \mathrm{D},\ \mathcal{N})$の構造をそこに制限して考えるとき，量（体系）になる。

n進小数は，このように，数$\mathcal{N}$の元であるという意味で，また量（体系）$(\mathrm{Q}_n,\ \mathrm{D}_n,\ \mathrm{F}_n)$の$\mathrm{F}_n$の元であるという意味で，数になる。そしてさらに，量としてのn進小数がこれから導かれる。即ち，量（体系）として捉えられた$(\mathrm{F}_n,\ \mathrm{F}_n,\ \mathrm{F}_n)$がそれである（§4.4）。

総　目　次

第Ⅰ部

1　“量”ということ

2　導入——量の構成
2.1　量（集合）の構成
2.2　量の差
2.3　量の比

3　量 形 式
3.1　量形式（Q，D，$\mathcal{N}$）
3.1.1　代数的構造
3.1.2　順序構造
3.1.3　位相構造
3.2　量の分類枠
3.3　量直線
3.3.1　量直線
3.3.2　量（体系）の，量直線への埋め込み
3.4　Q＝D，D^{+}の場合
3.5　1次元実線形空間の量（体系）化

4　数
4.1　量の比・倍としての数
4.2　数（要素）の特定
4.3　代数的構造としての数
4.4　量としての数
4.4.1　量としての数
4.4.2　数＝［量の比］と，［数＝量］の比
4.4.3　“数直線”
4.5　数の身分

5　量の数値化と量計算
5.1　量の数値表現
5.2　量の積
5.2.1　量の積
5.2.2　“長さ×長さ＝面積”について
5.3　量の数値計算
5.3.1　数値計算の構造
5.3.2　形式の選択
5.3.3　量の積の面積図式

第Ⅱ部——分数——

6　“分数”の形式化

7　量の比（倍）としての分数
7.1　整数比としての量の比
7.2　整数比の数学的形式
7.3　割合，倍——整数比の導く形式
7.4　割合・倍$\frac{n}{m}$の操作的な読み方
7.5　量測定，単位付き分数

8　代数的構造ないし量としての分数
8.1　比（倍）の算法
8.1.1　乗法——倍の合成
8.1.2　加法——倍の和
8.2　有理数体
8.3　量としての分数

9　分数の既存の読み方について——あるいはそれへの批判
9.1　“割合分数”——倒錯視（1）
9.2　“量の分数”——倒錯視（2）
9.3　“分割分数”
9.4　“操作分数”

10　分数の中への整数の埋め込み
10.1　分数の中への整数の埋め込み
10.2　分数＝整数÷整数

11　“小数”形式
11.1　自然数
11.1.1　序列，自然数
11.1.2　計数
11.1.3　序数と基数
11.2　小数
11.2.1　計数単位，単位システム，小数
11.2.2　数／量としての小数