"数/量" の主題探求(1)

宮　下　英　明

目　　次

平成5年4月15日受理

0　緒言

0.1 “現行”の改革

何事でもそうであるが，一旦規格というものが定められ，“現行”ができあがってしまうと，それを変えることは非常に困難になる。

例えば，在来線の軌道の幅は今日では狭過ぎるものになっているが，これを“修正”という形で改めることはできない。社会がこれの上でリアルタイムに動いているのであり，この動きにストップをかけることはできない。

“在来線の改良”の範疇には，軌道の幅の修正は含まれていない。実際，在来線の改良——車両の改造，ダイヤ改正，トンネルや橋の工事といったもの——は，結局のところ，軌道の幅を在来のものに固定化する方向に作用する。

軌道の幅を改めるには，“新幹線”という形で新しい規格を実験的に導入し，一地域におろし，部分から全体へと徐々に広げていき，やがて優位をかえていくというやり方しかない。

“新幹線”というカルチャーの導入は，サブ・カルチャーやカウンター・カルチャーの導入ではあり得ない。それは，ひとが“変えれるものならこっちの方がよい”と一様に認めるカルチャーの導入でなければならない。そして，“変えれるものならこっちの方がよい”となるのは，在来線によって得られることは全て得られ，その上にプラス・アルファがあることによってである。在来線の限られた駅しか覆っていないとか（サブ・カルチャー）とか，在来線の駅には行けない（カウンター・カルチャー）というのでは，“変えれるものならこっちの方がよい”にはならない。

数学教育の場合も同様である。算数/数学科の指導には“現行”があるので，数学教育を改めようとする試みには，

(1) “現行”を前提にすることで“現行”を固定化するタイプのものと，

(2) “新幹線”の部分的導入タイプのもの

の二種類が区別される。

さて，わたしの認識するところでは，今日数学教育においては在来線の不都合が多々現われている。数学教育は“新幹線”の企画をそろそろ始めてもよい時期である。とりわけ数の指導に対して，これが必要であると思われる。

0.2 現行の数指導の特徴と弊害

現行の数指導には色々と不都合が現われている(註)。そしてこれらの一番のおおもとは，わたしの見るところ，数を存在として自立させることに対する必要以上の躊躇である。このようなスタンスが学習に種々の不都合をもたらしている。

現行の数指導の特徴を簡単に言うと，数（形式）の使用の導入を以って数（形式）の導入に代える——“いかに”を以って“何”に代える——ということである。数を使用（“いかに”）の中に埋没させ，数そのものの存在性（“何”）を曖昧にする。

これを教育的方便として合理化することはできない。曖昧に提示されたものを学習するというのは，理不尽であり当然不可能であり。ある段階になると，数の使用は数が何であるかを知らねば理解できないようになる。実際，例えば小学校の主題になる分数の割り算の使用の理屈は，大人でさえも説明できない。

“いかに”で導かれる学習は外延的であり，外延的な学習が破綻することは初めから目に見えている。学習は生成的でなければ保たない。数学教育は，“何”から“いかに”（“人の生活”）が生成されるように設計されていなければならないのである。

“いかに”を以って“何”に代える指導——外延的な指導——は，学習者に数学の学習法を誤解させる。数学の理解は生成的（“すべてを身につけるというのではなく，必要になったときにその場でつくり上げる”）であるということを知っている生徒は，驚くほど少ない。

弊害は教師の方にも現われる。即ち，主題の本質を見過たせる教材をつくらせてしまうということである。例えば，分数の本義が“整数比”である以上，“単位分数”とか“仮分数・帯分数”は本来主題として起こる筈のないものなのである。

（註）簡単なところでは，言い回しの混乱がある。例えば，対象式"３＋５"（対象"３と５の和"を表わす式）が"足し算の式"と言い表される。もちろん，"３＋５"の中に"足し算"が存在しているわけではないし，これを"足し算に対して開かれている式"と読まねばならないわけでもない。

"９÷４＝２あまり１"のような，文法の混乱もある。これは非文である。数学での"＝"の文法は，両辺に対象式がくるというものである。"２あまり１"はもちろん対象式ではない（それは何も表わしていない)。——ちなみに，現行では"＝"を"同じ"と読ませる指導が希薄である。学習者は等式"３＋５＝８"（二つの対象式"３＋５"と"８"の同値を表わす式）に対して，"３＋５"は問題で，"＝"は答えを求める促し（プロンプト），そして"８"が答えであるかのような印象を抱いている。

0.3　新しい数指導の構想

数の新しい指導体系としてわたしの構想するものは，現行の内容を取り替えるものではない。いま有る内容を単に異なる形で現わそうとするものである。その方法は，標語化して言えば，"直接性の回復"ということになる。

例えば，自然数を"系列"として主題化する，分数を"量の整数比"として主題化する，"正負の数"を"量の対称化に応ずる係数の対称化"として主題化する，特に，量のサブ・システムとしての数の意義を主題化する(註)，ということである。

現行は，"いかに"で以って"何"を代える ことにより，直接性を失ってしまっている。しかし，はじめにも述べたように，あるレベルになると"何"を理解せずには"いかに"についていくことができなくなるのである。"直接性の回復"の目的は，"何？"と問えることができ，これに答えることができるようにすること，そして数学に対する生成的な理解を実現することである。——教材から"いかに"（"人の生活"）をなくして無意義な形式だけを残すということではない。"いかに"が生成されるような理解を実現するということである。

（註）これは，"量数一元論"と"量数二元論"を同時に阻却するものである。

0.4　本論考の位置づけ

数を存在として自立させる指導は，"現行"から外れる。"現行"の改良のように行なえることではなく，"現行"の否定になってしまう。それは，先に述べた"新幹線"の戦略によって実現されるしかない。そして先ずは，現行の数の指導体系に別の指導体系を対置することから始まる。

本稿は，このような認識に立って，"数"とはどのような主題であるかを詳らかにしておこうとするものである(註)。これは，新しい指導体系が提示されるときに，それの基本的認識としてひとが当然検証しようとするところのものである。

したがって，わたしがここで求めようとするものは"周知の確認"である。新しい指導体系の提案は，ひとが周知として了承するところから始めねばならない。わたしが以下述べることは，少なくとも存在論的な論考を別にすれば，言えば読者が周知であるとして了承する筈のものである。そしてこの了承を得て，つぎに数の新しい指導体系を問うことになる。《主題の直接性を回復し生成的な理解を実現する》数指導を将来的に見込み，前作業として"数/量"主題の"何"を明らかにしておくこと，これが本稿の位置づけである。

（註）ここで詳らかにしようとする"数/量"の主題の内容は，陰に陽にすべて学校数学の中に含まれている——わたしは"すべて"という点を強調したい。学校数学が数学と別ということはない。学校数学は，算数の段階から既に優れて数学である。

1　"数/量"の主題

数は自立したシステムであるが，使用される

それは，一つのシステムにサブシステムとして組み込まれる。数をサブシステムとして含むこのシステムは，日常語の“量”に対応する。

特に，算数/数学科での数の主題化は，同時に量の主題化になる。

本章では，論点を残しつつ（積極的には，論点を挙げる目的で），“数/量”の意義——“数/量”の主題の内容——を概説的に述べる。

1.1 “数/量”の解釈

1.1.1 実践形式としての量形式

人の一つの実践形式が量形式である。即ち，人の一つの実践形式として量形式を対象化することができる。

1.1.2 数の系の複合としての量形式

量形式は，数の系へと分解できる。但し，量形式を一つの数の系の複合形式として理解できる，という意味で。逆に，一つの数の系は量形式のすべての因子を与える。

1.1.3 数の使用形式としての量形式

“実践形式である量形式は一つの数の系の複合である”を反転するとき，“量形式は一つの数の系の使用形式である”となる。これは，“数の系”の抽出元を“数の系”でもって説明しようという後先逆転させた言い方であるが，論の論理的展開はこの方向づけにしたがって進むことになる(註)。

（註）われわれは，現象を，それの本質から論理的に説明しようとすることがある。しかし本質は，われわれが現象に対して読んだところのものである。論理的説明は，つねに，抽出されたものを用いて抽出元を説明するという後先の逆転である。

1.1.4 映像としての量

量は人の実践——行為——の上に示される。量を対象化することは，人の行為の一定の形式を対象化することである。

特に，量は人の行為の原因ではなく結果である。《量という存在が既にあり，それの本質として量形式が抽出される》というのではない。量形式が実体化された相が“量”である。

認識論的に言えば，量形式で把捉されたものが量である——この意味で，量は量形式の原因ではなく結果である。素材に量形式が投げかけられて浮かび上がる像が量である。量とは，量形式で映し出された素材の像である。

例えば“長さ”は，机のへりをものさしで測る，机の二つのへりに長さの比を読む，といった実践の形式で映し出される机の像である。

そこで，“量”の定義は，〈人の実践形式としての量形式〉の定義である。

わたしは，《この実践形式は，徹頭徹尾“数”の使用形式である》と考える。量の性格は，使用する数によって最初から決定されている。例えば“長さ”は，係数として使用する数（通常，実数）が稠密でありアルキメデスの公理を満たす故に，稠密でありアルキメデスの公理を満たすのである。

1.2 “数/量”の主題——形式の探求

本論の立場では，“数/量”の主題は“図形”の主題と基本的に変わらない。即ち，《形（形式）の探求》である。

例：

(1) “自然数（系列）”は，異なる対象であるところの

1，2，‥‥，9，10，11，‥‥

ϕ，$\{\phi\}$，$\{\phi,\{\phi\}\}$，$\{\phi,\{\phi\},\{\phi,\{\phi\}\}\}$，‥‥

はじめ，はじめのつぎ，はじめのつぎのつぎ，‥‥

等に対して一様に見られた形である。

(2) “数”は，異なる対象であるところの自然数，分数，整数，有理数，実数，複素数等に対して一様に見られた形である。

(3) “長さ”は，異なる対象であるところの（ひも，＋），（道，＋）等に対して一様に見られた形である。

(4) “量”は，異なる対象であるところの長

さ，重さ，容積等に対して一様に見られた形である。

1.3 数/量形式探求の内容

“数/量”の主題──《形式の探求》──は，つぎのような下位主題でなる：

(1) “数/量”の存在論として，数/量の形式性を明らかにする；併せて，数/量形式を道具として身分づける；
(2) 数/量形式を規定する；
(3) 数──即ち，数形式の実現になっている（形式的）存在──の構成(註)；
(4) 数/量形式のことばで，数/量に関する実践──現実の実践──を説明する；これを，数/量形式の規定の妥当性を検証する意味から行なう．

ここで(1)，(2)と(3)，(4)は，総論対各論の関係にある。前者は数/量の一般的条件──“数/量”と呼ばれ得るための条件──の規定に向かうものであり，後者は，“数/量”を個別的に実現する仕方（構成方法）を示すものである。

（註）例えば，自然数の構成──“系列”を構成し，そしてこの上に算法＋，×を導入する──は，この意味での“数の構成”。

1.4 “数/量”の語の日常的使用における異なる意味──カテゴリー，系，要素

“数/量”という言葉は，異なる論理レベルで用いられている。混乱のないよう，ここで改めて“数/量”の語の用法を確認しておく。

“数/量”の語が意味するものは，以下のもので，これらは異なる論理レベルにある(註)：

(1) 数/量形式
(2) 数/量の系のカテゴリー
(3) 数/量の系
(4) 数/量の系の要素

例えば，“量”の語の以下の用法は，互いに異なる：

(1) “加法は量の因子の一つ”
“長さ，重さ，時間，速さに通底していることは，量であること”
(2) “長さは量に属する”
(3) “長さから導出される量である面積”
(4) “2cm，このコップの重さ，一日のながさはそれぞれ量”

本論では，これらの区別ための用語法というものを特に導入することはしない。“数/量”の語がどの意味で使われているかは，注意深くあれば，文脈から知られる。──但し，本文中，量の系の要素を意味する言い回しとして“量（大きさ）”を使うことがある。

1.5 数/量形式の規定

1.5.1 数/量形式の恣意性

数/量形式は，“実在の事実”のように存在するのではない。それは，対象化の一形式である。そして，《対象化は，ある都合にしたがう対象化である》の意味で，数/量形式は一つの恣意性である。

数/量形式の規定に依存して，数/量が決まる。規定の変更により，何が数/量であるかが変わる。

例えば，“硬度”を量にするような量形式を考えることは可能である。しかし，代数的構造──加法と倍作用が定める構造──を量形式の含意と考えることにすれば，“硬度”は量ではなくなる。

本論では，数/量形式を，

〈小学校算数からはじまる学校数学で，“数/量”領域の内容として学習者に課しているところの内容〉

を説明できる形式であるように，規定する。

1.5.2 数の系の特定，数形式の規定

われわれが既に“数”と呼んでいるものの特定を，数の系の特定と考えるとしよう。

“数”は一つではない。自然数，整数，有理数，実数，複素数，四元数といったように，色々ある。われわれは，これらを数形式の色々

な現われであると考え，これらに通底する形式を“数形式”と規定することにしよう。

即ち，“数の系”と呼ばれ得るために対象が備えていなければならないもの，それを“数形式”と考えることにする。

数形式を，集合N，Nの上の加法＋，乗法×を因子とする系

$$(N,\ +,\ \times)$$

に関する条件として規定する。数形式を備えた系（N，＋，×）が，数の系である。

1.5.3　量形式の規定

量形式を数の使用形式として理解するのが，本論の立場である。そこで特に，一つの数の系（N，＋，×）に対し一つの量形式が定まることになる(註)。わたしは，これを系

$$((N,\ +),\ (N,\ +,\ \times),\times)$$

と規定する。

ここで，三つの因子（N，＋），（N，＋，×），×は数の系（N，＋，×）から分離したものであり，((N，＋)，(N，＋，×)，×）は，

《第一因子の（N，＋）に第二因子の（N，＋，×）が第三因子の×によって作用する系》

と読まれるものである。

〈量形式を伴う系〉としての量の系は，このとき，((N，＋)，(N，＋，×)，×）と同型な系（(Q，＋)，(N，＋，×)，$_\times$）のことである。存在論的には，素材の上に浮かび上がる〈形式（(N，＋)，(N，＋，×)，×）をもった像〉である。

なお，量の系（(Q，＋)，(N，＋，×)，$_\times$）に組み込まれているNの要素の身分を言い表わすのに，“スカラ”を用いることにする。

（註）したがって，量形式は“数の系$\mathcal{N}$に応ずる量形式”と表現されるものである。対応して，量の系も“数の系$\mathcal{N}$に応ずる量の系”と表現されるものである。

特に，本論では“量形式”の語を

“$\mathcal{N}$が数の系全体にわたるときの〈$\mathcal{N}$に応ずる量の系〉すべてに通底する形式”

の意味で用いることはしない。

1.5.4　“量”の従来の規定法

わたしは数依存で量形式を定義したが，“量”の従来の規定法はこのようではない。それは，およそつぎの二通りである。

一つは，事実上ただ一つの数に依存する量形式を“量”と定めるものである。実際，多く見られる“量”の規定は，たかだか実数に依存する量形式を“量”と定めるというものである(註1)。

もう一つは，色々な対立概念の組み合わせで量の類化を行なうというものである(註2)。この方法は，範疇をいたずらに煩瑣にするばかりで，しかも方法として首尾一貫していない。そもそも，対立概念の導入は恣意によっている。

（註１）例えば，“量”を実数体上の１次元線型空間と規定するもの。あるいは，量の条件として，順序関係の存在やアルキメデスの公理などを列挙するもの。

（註２）例えば，離散－対－稠密，連続－対－非連続，加法に関して対称－対－非対称。

1.5.5　“量”概念の非日常化

数依存での“量”の定義は，首尾一貫しており，不公平（特定の数の系に応ずる量形式の採用）や煩瑣（色々な対立概念の組み合わせによる“量”の類化）から免れている。しかしその反面，“量”概念の著しい非日常化がなされている。特に，“複素数の系に応ずる形式”の概念によって。

1.5.6　量の系の集合論的（形而上学的）規定

〈存在〉の集合とその上の同値関係を仮構して量の系を構成する方法が考えられる。

例えば長さでは，〈存在〉の集合として線分の集合を，その上の同値関係として“合同”の同値関係を，それぞれとる。長さ（大きさ）の各々は，一つの同値類として定式化される。

時間の場合には，例えばアナログ時計において，針の回転という現象の集合と，“回転角相

等”の同値関係をとる。各時間（大きさ）は，一つの同値類として定式化される。

2　数/量の存在論

本章では，数/量の存在について行論する。

“数/量”は読みとして起こる。即ち，人の生活——ウィトゲンシュタインの謂う“言語ゲーム”——が先ずあり，そこに“数/量”が読まれる。

“数/量”が読まれるとは，一つのシステムが読まれるということである。数/量とは数/量形式である。

読みとして虚構であることは，これが実現されることを妨げない。ここに，“数/量の表現”の主題が立つ。

こうして“数/量”という虚構は二種類の具体に支えられている。それの母体である言語ゲームと，表現メディアである。

2.1　道具性としての“数/量”

“数/量”がわれわれの対象（われわれにとっての存在）になる理由は，生活（世界）におけるこの概念の使用にある。“数/量”の条件は，このような使用に足るための条件である。そしてその条件は，“数/量形式”として述べ得る。

実際，数の道具的使用の諸現象が，数/量形式の概念化の根拠である。

例えば，“系列”としての自然数（形式）の場合，“数える”（計数），“番号を付ける”，“識別番号を付ける”といった生活的実践が，これの根拠になっている。自然数の条件はこのような使用に足るための条件であり，実際，この条件がそのまま“系列”という形式の定義（“ペアノの公理”）になっている。

2.2　量の生起

2.2.1　〈読み〉としての量

量は，モノ（事態）でもモノの“属性”でもない。量は，モノに対する読みである。あるいは，モノに対する読みであることによって，対象として意識されるところのものである。

モノに対して“量”という読みを為すことが，“量の対象化”である。モノに量が読まれることによって，そのモノは“量の現象”（あるいは，この意味での“量の表現”）になる。“量の現象”は実践の結果であり，結果論である。現象の以前に量があるのではない。

2.2.2　〈読み〉の恣意性

モノに量を読むこと——モノの属性として量を対象化すること——は，ひとの恣意である。量は，モノの含意ではない。ひとが，モノの上に量の読みを投企するのである。

そこで特に，一つのモノに対し異なる量（カテゴリー）を読むことが可能である。また逆に，異なるモノに同じ量（カテゴリー）を読むことが可能である。

例えば，一つの事態としての物体の落下に対し，ひとは“時間”，“距離”，“速度”，“重さ”，“力”といった色々な量（カテゴリー）の読みをすることができる。また，つぎのような異なる事態に対して，ひとは等しく“重さ”という読みをすることができる：

- ゴムひもに物をつるすとひもが伸びる
- バネの上に物をのせるとバネが縮む
- シーソー遊び
- 将棋倒しの下敷きになって苦しい
- 両手の荷物のバランス
- そばを車が通り過ぎるときの地響

2.2.3　量の生起

われわれは“はかりで量を測る”という言い回しをするが，これを文字通りに受け取れば，量がはかり以前にあることになる。しかし，量をはかり以前のものとして想定するのは，形而上学（イデア論）である。

量は，《はかりの上の現象に量が読まれる》という形で，測定によって生起する。

はかりとは，先ず，はかりにかけられるモノ（事態）に対して，（量が読まれるところの）現象を現わす装置のことである。

はかりはこのような装置であることの上で，“一つの量（大きさ）”として読まれることになる差異化(註)可能な現象を各モノに対して一意的につくり出し，差異化される個々の現象に名を与え，そしてこのことによって個々の現象を特定させる装置のこととなる。

はかりの上の現象の身分は，モノの記号である。そして記号は，それ自体で——即ち，モノから独立して——ひとにとっての存在になる。そして，このときひとがする（してしまう）ことは，《記号》に対する，《モノの記号》から《量（大きさ）そのものの記号》への読み換えである。

モノとそれの記号——それをはかりにかけたときのはかりの上の現象——の対応は，論理的に，多対一である。したがって，モノとそれの量（大きさ）の対応は，多対１である。

（註）量（大きさ）が量（大きさ）としてあり得るのは，他の量（大きさ）と異なるという形で対立する限りにおいてである。実際，量（大きさ）としてわれわれにとって存在するものがただ一つ（例えば１ｍの長さが唯一）である場合，それは量（大きさ）である必要はない。

2.2.4　量カテゴリーの色々

量カテゴリーの色々は，はかりによる操作的定義の色々である。

例１．“長さ”

長さの場合，はかりの機能は，先ず，“線分”が読まれるところの現象を現わすことである。（実際，“ものさしをあてる”ことの第一の意義は，“線分”という対象を現出さることである。）測度は，線分の測度として為される。

例２．“時刻／時間”

時刻／時間の場合，はかりは“時計”である。“時計”は時刻／時間を計るものである以前に時間を現わすものである(註)。この場合“時計”とは，先ず，（循環論法の言い方になるが）時間の経過にしたがって〈相（貌）〉を変ずる何かである。それは，天体の運行でも“腹時計”でもよい。ともかく，時間の経過に伴う〈相〉の変化をわれわれに現前させるということが，この場合に本質的な点である。そして測度は，この〈相〉の変化の測度として為される。

（註）われわれは，“時計”以前に時間が存在するというように考えたくなる。即ち，“いかなる種類の〈相〉の変化も認められない〈真空〉の中にも時間は在るのではないのか？”という具合に。しかし実際は，この想念においてはわれわれ自身が“時計”として機能しているのである。

2.3　量形式と数

2.3.1　量形式と数

量の対象化を，あるいは対象である量を，ことばに表現しようとするとき，それは一つの形式——量形式——の記述になる。

量形式を言語化しようとする中で，数が対象化されてくる。数は，一つの形式——数形式——を伴うシステム（数の系）として対象化され，そして量形式は〈数が部品になっている構成体〉の形で述べられる。

2.3.2　量の契機——素材と数

量形式が対象化されるとき，結果論として，対象に対する“量”の読みは量形式の投企であることになる。

さらに，量形式が数を部品としていることを考えるとき，《量とは，数という形式を通してある素材を見たときにその素材の上に一つの対象性として浮かんでくるところのもの》，と言うことができる。そしてこの意味で，量の契機は，素材と数である。

ひとは，“量”を一つの実在のようにイメージしやすい。われわれ——特に，数を形式として使用するわれわれ——に先行して存在するもののように考えやすい。しかし，量はそのようなものとしては存在していない。

“量”は形式である。しかしそれは，《一方に数形式，他方に量形式》というようにあるの

ではない。量形式は，数形式の複合である。

特に，数を導くものとして量を考えるのは，誤りである。"量の係数" は "数" の意味ではなく，"数" の一つの使用形態である。

2.4 言語ゲームとしての数/量

2.4.1 言語ゲームとしての数/量

モノ（事態）に対する量形式の投企は，ウィトゲンシュタインの謂うところの言語ゲームである。

例えば，

《"40km/*h* の自動車と 60km/*h* の自動車" と言うときの 40km/*h* と 60km/*h* に対しては，その間に加法を考えることはしない》

は，この言語ゲームの内容の一つである。

2.4.2 "保存性" の主題化の錯誤

"量の保存性" は，〈存在に関する事実〉として主題化されるものではない。それは，生活の中に占めるべき位置をもたない無意味な発想の一例として，せいぜい言語ゲーム論の一主題になるようなものである。

"重さの保存性" を例に，このことを見ておこう。

重さの保存性は，"粘土玉を伸ばしても重さは変わらない" といった言い回しで語られる。

いま，粘土玉を伸ばして重さが変わったとしよう。はかりについては疑わないとすれば，われわれはこのことに対してどのような反応をするか。重さに対する考え方を改めるということはしない。世の中がおかしくなったか或いは自分がおかしくなっていると考えるのが自然である。（朝目覚めると周りの物がみな2倍の大きさになっていたとしたら，どうだろう。われわれは物の大きさに対するこれまでの考え方を改めるということをするだろうか。そうはしない。何かがおかしくなったと考えるのみである。"重さの保存" の崩壊は，これと全く同じ種類の出来事なのである。）

"粘土玉を伸ばすと重さが変わる" という事態は，重さに対する考え方を修正するものにはならない。粘土玉を伸ばすことで変わる "重さ" は，われわれの "重さ" とは無関係な何か他の概念（たまたまことばが同じな概念）ということになるのみである。この意味で，重さは，《粘土玉の伸長によって変わる》ということができないのである。したがって，"粘土玉を伸ばしても重さは変わらない" という言い回しは無意味なのである。ウィトゲンシュタインの言い方に倣えば，この言い回しはわれわれの生活——言語ゲーム——において占める場所をもたないのである。

繰り返すが，重さは《粘土玉の伸長によって変わる》ということができない。それが変わるとは，世の中が変わるということである。実際，このときには，重さが関わる生活がすべて破綻する。（はかり売りが無効になる，体重が無効になる，‥‥。）

重さに対して生活が展開されるというのではない。生活の形態の一つが重さなのである。再びウィトゲンシュタインに倣って言えば，重さは言語ゲームの中にある。そしてこの言語ゲームでは，"粘土玉を伸ばしても重さは変わらない" の言い回しは，端的に無意味なのである。それは，奇妙な，病的な言い回しであり，あり得ない言い回しなのである。

"重さの保存性" のことばを言い出すとすれば，それは，《重さの言語ゲーム》という主題に対してである。"重さはしかじか" という形で重さを論じるときのその主題の名を《重さ》と言うことにすれば，"重さの保存性" は《重さ》の内容にはならない。"重さはしかじか" のつもりで "重さの保存性" を言い出すことは出来ないのである ——《あり得ない言い回しである》という理由で。

2.5 存在論の無用化

2.5.1 形而上学（イデア論）の傾向

モノ（事態）に量を読み量を対象化するということを一旦為すと，われわれはつぎに，モノを量の表現のように考えるということをする。実際，《モノに量が示されている》という捉え

方を反転させれば,《量の表現としてのモノ》という発想の仕方になる。

実際は，モノのみが実在するものであって，量は〈幻想〉なのであるが，いまや意識の中では，モノは量の媒体ないし量の潜在形態として身分づけられ,〈量＝幻想〉が〈モノ＝実在〉の上に置かれるようになる。確固たる対象は量の方であって，モノは偶然的なものとなる（イデア論！)。

例えば，物をゴムひもにつるすとゴムひもが伸び，バネの上にのせるとバネが縮むという事態が，重さの表現のように意識される。重さの一つの偶然の現われ（具現）のように意識される。

繰り返し強調するが，われわれが数/量を実現する（“作る”）限りで，数/量は存在する。実現されなければ数/量はない。“〈実現〉という行為に先立って数/量は存在する”—— 即ち，“発見され命名されるのを待っているかのように数/量は存在している”—— と考える立場が実在論（プラトニズム）としてあるが，わたしはこの立場をとらない(註)。

（註）いったん実現された数/量に対しては,《われわれから独立した存在》という見方をすることができる。しかしこれは，実在論とは別のものである。

2.5.2 〈存在〉の問題化の阻却

“数/量は実現される限りで存在する”と述べたが，このときの“実現”とか“存在”という言葉の意味は曖昧なままにしておかねばならない。ただし，この語の意味の探求が困難だからというのが理由ではない。

一般に，われわれの言語行為は，生活上の効果によって正当化されるのであり，有意味であることによってではない。奇妙に聞こえるかも知れないが，言葉に〈意味〉はない。コトバを用いた行為の効用があるのみである(註)。

そしてこの意味で,“実現”,“存在”という語に〈意味〉はない。実際われわれは，例えば,“周知の生成規則によって実現される自然数1,2,････,9,10,････はどのように存在しているか”と訊かれたら，面食らってしまう。

われわれは《存在者1,2,････,9,10,････について語る》というスタンスをとる。これが“1,2,････,9,10,････が存在する”ということである。

（註）伝来の哲学は，この効用の根拠として言葉の〈意味〉を求めた。しかし〈意味〉があるから効用があるのではなく，端的に効用があるのである。

2.5.3 数/量の外延的実現

われわれは,《数/量の構成的定義が与えられたとき，数/量は外延的にも実現されている》と考えることにする。例えば，記号1,2,････,9,0を用いた自然数の十進生成法が与えられたことに対して，{1,2,････,9,10,････} のような対象化を許すことにする。

“列挙”と“外延的な実現”とを区別しよう。数/量は,“構成（生成）規則を与える”という形で実現されるのみであり,“列挙”という形態の実践では実現されない。しかし,“列挙し尽くすことは不可能である”という言い方で“外延的な実現”を退けようとするのは，筋違いである(註1)。

“列挙し尽くせない”という言い回しの主旨は,“外延的に実現できない”ではなく，閉じた記述にならない”である。そしてこの意味で,“列挙”は，閉じた記述としての“記号生成の規則の記述”——“有限個の記号から互いに区別される記号列を無際限に生成できる実効的規則（アルゴリズム）の記述”——に対するのである。

われわれは閉じた記述に向かう。このとき，数/量の対象化は数/量生成のアルゴリズムの対象化である。われわれは,“数/量”の概念をこの形において把捉する。しかし，この立場に潔癖になることで言語行為を不便にしようとは思わない。われわれは {1,2,････,9,10,････} のような対象化に逡巡することはしない。

実際，われわれは存在の事実の探求をしているのではなく(註2)，存在のフィクションをつ

くっているのである。

（註１）数/量は，ある実効的規則に従って生成される記号の総体として想念される。超越的概念である“総体”は，想念される他ない。数/量は，確かに，数/量の生成規則によって，あるいはこの規則の適用のデモンストレーション（最初のいくつかの項をつくってみせる）の形で，示されるのみである。

しかしわれわれは，“示されるのみ”の“のみ”に惹かれるべきではなく“示される”の方に惹かれるべきである。そしてこのとき，“示されている存在者”は〈数/量の外延的な実現〉である。

（註２）例えば，“列挙”という行為を問われたらわれわれは困ってしまう。“列挙”は，五感に拠りどころを求めてもおかしいし，“痕跡”を規準にしてもおかしい。（口で述べた“列挙”は何を残しているか？）

2.6 数/量の命名

2.6.1 “数/量の命名”

数/量の名の系は，また数/量の系である。実際，それはもとの数/量の系と同型でなければならず，そして数/量の系と同型なものは再び数/量の系である。

したがって，“数/量の命名”とは，数/量の系に別の数/量の系を同型に対応させることに他ならない(註1)。即ち，一つの数/量の系を同型な別の数/量の系に替える(註2)ということでしかない。

よって，“数/量の命名”という言い回しは，数/量の実在論に立っているか，数/量の系が既に実現されている場合にのみ意味をもつ。実在論を退けているわれわれの立場では，“数/量の命名”とは既に実現されている数/量の系を同型な別の数/量の系に替えることである。

（註１）特に，一つの数/量の系は，それ自身の名の系と見なせる。

（註２）例えば自然数の系の場合，ローマ数字をアラビア数字に直すとか，10進数を16進数に直すなど。

また，既存の数に簡便な名を与える（このとき新しい数が実現されることになるのは，あくまでも結果であり，意図のうちにはない）など。

2.6.2 “命数”，“数詞”

通常，数の系の実現に他ならないことが“命数”と呼ばれ，数の実現態に他ならないものが“数詞”と呼ばれている。もちろん，これは誤った語用である。“命数法”とは，実際のところ，数の生成法――数の名をつくる規則ではなく，数そのものをつくる規則――のことである。

3 数形式――“数の系”

本章では，数形式を定める。それは，一つのシステムの代数的，順序的，および位相的構造を定めるという形で行なわれる。数形式の記述として示されたこのシステムが，“数の系”である。

なお本稿では，ここで行なう“数/量”に関する諸規定が妥当なものであるかどうか ――“数/量”に関する周知の性質を過不足なく含意するものになっているかどうか――の検証の都合のために，命題の自明な証明も敢えて記載していくことにする。

3.1 “数の系”

われわれは，“数の系”の条件を考えるより先に，“数”と呼ばれているもの――自然数，分数（正の有理数），整数，有理数，正の実数，実数，複素数，四元数，またp進数といったもの――を既にもってしまっている。したがって，“数の系”の条件づけは，〈既にもっている数の系を“数の系”として合理化し得る条件〉の作為――後追い的作為――になる。

“数の系”の範疇を拡げるほど，“数の系”の条件は弱まる。例えば，複素数を考えることで，順序関係は“数の系”の条件でなくなる。また，四元数を考えることで，乗法の可換性は

“数の系”の条件でなくなる。

一方，“数の系”の条件としてわれわれが求めるものは，数の使用――特に，量処理における数使用――の根拠となるようなものである。

以上のことを考慮して，われわれは“数の系”を，集合Nとその上の二つの内算法$+$，$\times$でなる系（N，$+$，$\times$）で，つぎの条件を満たすものと定義しよう：

(1) $+$は結合的かつ可換．

(2) $\times$は結合的で，単位元$1 \in N^*$が存在する．

(3) $+$と$\times$の間に左右分配法則が成り立つ(註1)：

$$\xi \times (\eta + \zeta) = \xi \times \eta + \xi \times \zeta$$
$$(\eta + \zeta) \times \xi = \eta \times \xi + \zeta \times \xi$$

(4) 各要素は，$+$に関して可約；即ち，

$$\xi + \eta = \xi + \zeta \implies \eta = \zeta$$

(5) N^*の各要素は，$\times$に関して左右可約；即ち，$\xi \in N^*$に対し，

$$\xi \times \eta = \xi \times \zeta \implies \eta = \zeta$$
$$\eta \times \xi = \zeta \times \xi \implies \eta = \zeta$$

(6) 任意の要素ξ，ηに対し，要素ζで，$\xi + \zeta = \eta$か$\xi = \eta + \zeta$となるものが存在する．

ここでN^*は，Nが零元0 ―― $+$に関する中立元――をもつときは$N \setminus \{0\}$(註2)，そうでないときはN自身。

単位元1の存在と条件(4)，(5)は，“数使用”の観点から要請される。（N，$+$）(註3)が群のとき，(4)はこれに含意される。また（N^*，$\times$）が群のとき，(5)はこれに含意される。また，$\times$が可換のとき，(3)の条件式は第一式のみでよい。

なお，要素ξに対し$\xi + \xi = \xi$が成り立つとき，ξは零元である(註4)。

（註1）“加法”，“乗法”の呼称ないし$+$，$\times$の記号の使い分けは，形式的には，専ら分配法則に拠っている。即ち，

$$(x * y) \# z = x \# z * y \# z$$

の関係にある$*$の方が加法と呼ばれ（かつ$+$と記され），$\#$が乗法と呼ばれる（かつ$\times$と記される）のである。

（註2）一般に，集合Xとその部分集合Yに対し，Yに属さないXの要素全体の集合を$X \setminus Y$で表わす。

（註3）数の系の構造は，$+$，$\times$で定義される代数的構造，順序関係$\leqq$で定義される順序構造，また位相構造，の組み合わせで，色々に考えられる。どのような構造を考えているかを，ここでは（N，$+$），（N，$\leqq$），（N，$+$，$\leqq$）のような表記によって示すことにする。

（註4）任意の要素ηに対し，$\xi + \eta = (\xi + \xi) + \eta = \xi + (\eta + \xi)$。$+$の可約性より，$\eta = \eta + \xi$。

3.2　順序構造を伴う数の系

学校数学では，複素数（ないし四元数）を除いて，数の系には順序構造を導入することになる。順序構造を伴う数の系は，以下のように定式化される。

数の系（N，$+$，$\times$）とこれの上の全順序関係$\leqq$に対し，N^+を，

(1) Nが$+$に関して群であるときはNの正元（$\geqq 0$の元）全体，

(2) そうでないときはN自身

とし，$N^{*+} = N^* \cap N^+$とする。系（N，$+$，$\times$，$\leqq$）において以下の条件が満たされるとき，これを順序構造を伴う数の系と呼ぶ：

(i) $\zeta \in N^{*+}$に対し

$$\xi < \xi + \zeta$$

また，$+$が群算法のとき，$\zeta < 0$に対し

$$\xi + \zeta < \xi$$

(ii) ξ，$\eta \in N^+$，$\zeta \in N^{*+}$に対し，

$$\xi < \eta \implies \xi \times \zeta < \eta \times \zeta$$

順序構造を伴う数の系においては，以下のことが成り立つ：

(1) $+$が群算法のとき，

$$\xi < 0 \iff -\xi > 0 \text{ (註1)}$$

(2)
$$\xi \leqq \eta \implies \xi + \zeta \leqq \eta + \zeta$$

あるいは，同じこととして(註2)，

$$\xi < \eta \implies \xi + \zeta < \eta + \zeta \text{ (註3)}$$

(3)　$\xi<\eta$ であるためには，$\xi+\zeta=\eta$ となる $\zeta\in N^{*+}$ の存在することが必要十分(註4)．

(4)　$$1\in N^{*+}\ (註5)$$

(5)　×が群算法のとき，
$$\xi\in N^{+*}\Longrightarrow\xi^{-1}\in N^{+*}\ (註6)$$

(6)　N^{+}，N^{*+} は，×に関して閉じている——即ち，ξ，η が N^{+} [N^{*+}] の要素ならば $\xi\times\eta$ も N^{+} [N^{*+}] の要素(註7)．

(7)　$\zeta\in N^{*+}$ に対し，
$$\xi<\eta\Longrightarrow\xi\times\zeta<\eta\times\zeta\ (註8)$$

順序構造を伴う数の系は，＋に関して群であれば，定義から，順序群である。この場合，N^{+} に対し，N^{-} で負元（≦０の元）全体の集合（$=\{-\xi\mid\xi\in N^{+}\}$）を表わすことにする。

さらに，順序構造を伴う数の系は，体であれば順序体である。

（註１）$\xi<0$ のとき，$-\xi>(-\xi)+\xi=0$。また，$-\xi>0$ のとき，$\xi<\xi+(-\xi)=0$。

（註２）$\xi\leqq\eta$ から $\xi+\zeta\leqq\eta+\zeta$ が導かれるとき，$\xi<\eta$ からも $\xi+\zeta\leqq\eta+\zeta$ が導かれる。$\xi+\zeta=\eta+\zeta$ からは（数の系の定義より）$\xi=\eta$ が導かれるから，結局，$\xi<\eta$ からは $\xi+\zeta<\eta+\zeta$ が導かれる。

逆に，$\xi<\eta$ から $\xi+\zeta<\eta+\zeta$ が導かれるとき，明らかに $\xi\leqq\eta$ から $\xi+\zeta\leqq\eta+\zeta$ が導かれる。

（註３）$\xi<\eta$ とする。

(1)　$\xi+\rho=\eta$ のとき：先ず $\rho\in N^{*}$。

(1-1)　$\rho\notin N^{+}$ なら，＋は群算法で $\rho<0$，よって $-\rho\in N^{+}$。そしてこのとき，$\xi=\xi+\eta+(-\eta)=\xi+\eta+((-\xi)+(-\rho))=\eta+(-\rho)>\eta$ となり，仮定に反する。よって $\rho\in N^{+}$。

(1-2)　$\rho\in N^{+}$ なら，$\xi+\zeta<\xi+\zeta+\rho=\eta+\zeta$。

(2)　$\xi=\eta+\rho$ のとき：先ず $\rho\in N^{*}$。$\rho\in N^{+}$ とすると，$\xi=\eta+\rho>\eta$ となり，仮定に反する。よって，$\rho\notin N^{+}$。そしてこのときには＋が群算法で $\rho<0$，さらに $-\rho\in N^{+}$。そしてこのとき，$\xi+\zeta<\xi+\zeta+(-\rho)=(\eta+\rho)+\zeta+(-\rho)=\eta+\zeta$。

（註４）(1)　$\xi<\eta$ とする。

(1-1)　$\xi+\zeta=\eta$ とする。このとき，先ず $\zeta\in N^{*}$。もし $\zeta\notin N^{+}$ なら，＋は群算法で $\zeta<0$，さらに $\eta=\xi+\zeta<\xi$ となり，仮定に反する。よって $\zeta\in N^{+}$。

(1-2)　$\xi=\eta+\zeta$ とする。このとき，先ず $\zeta\in N^{*}$。もし $\zeta\in N^{+}$ なら，$\eta<\eta+\zeta=\xi$ となり仮定に反する。よって $\zeta\notin N^{+}$。そしてこのとき＋は群算法で $\zeta<0$，よって $-\zeta\in N^{+}$。しかも，$\xi+(-\zeta)=(\eta+\zeta)+(-\zeta)=\eta$。

(2)　$\xi+\zeta=\eta$ かつ $\zeta\in N^{*+}$ のとき，$\xi<\xi+\zeta=\eta$。

（註５）もし $1\notin N^{*+}$ なら，＋は群算法で $1<0$。よって $-1>0$。しかしこのとき，$-1=1\times(-1)<0\times(-1)=0$ となり，不合理。

（註６）$\xi\in N^{*+}$ とする。もし $\xi^{-1}\notin N^{*+}$ ならば，＋は群算法で $\xi^{-1}<0$。しかしこのとき，$1=\xi^{-1}\times\xi<0\times\xi=0$ となり，不合理。

（註７）$N^{+}\neq N$ のとき＋は群算法。そしてこのとき，$0<\xi$ かつ $\eta>0$ からは，$0=0\times\eta<\xi\times\eta$ が導かれる。

（註８）$N^{+}\neq N$ のとき＋は群算法。このとき，$\xi<\eta$ かつ $\zeta>0$ とする。$\eta+(-\xi)>\xi+(-\xi)=0$ が導かれる。N^{*+} は×に関して閉じているから，$\eta\times\zeta+(-(\xi\times\zeta))=\eta\times\zeta+(-\xi)\times\zeta=(\eta+(-\xi))\times\zeta>0$。さらに，$\eta\times\zeta=\eta\times\zeta+(-(\xi\times\zeta))+\xi\times\zeta>0+\xi\times\zeta=\xi\times\zeta$。

3.3　順序構造を伴う数の系の位相

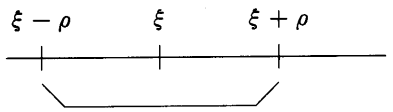
学校数学では，"分数の系の稠密性"のような形で，暗黙に数の系の位相——順序構造を伴う数の系の位相——を主題化している。

3.3.1　順序位相

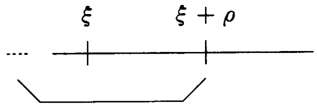
順序構造を伴う数の系（N，＋，×，≦）に対しては，それの標準的な位相として，≦に関する順序位相を考える。即ち，N の各要素 ξ に対し，ξ の近傍系の基を ξ を含む開区間(註1)全体 $\mathfrak{U}_{O}(\xi)$(註2)と定める(註3)。

$\xi \in N$と$\rho \in N^{+} \cap N^{*}$に対し，開区間$U(\xi, \rho)$をつぎのように定める：

(1)　$\xi-\rho$が定義されるとき，開区間 $]\xi-\rho, \xi+\rho[$



(2)　そうでなければ，開区間 $]\leftarrow, \xi+\rho[$



$U(\xi, \rho)$は$\mathfrak{U}_o(\xi)$に属する——これをξのρ-近傍と呼ぶ。ρがN全体にわたるときの$U(\xi, \rho)$は，順序位相に関しξの基本近傍系を成す[註4]。

また，(N，+) が群であれば，NからNへの写像：

$$\xi \longmapsto -\xi$$

は連続[註5]。特に，(N，+，≦) は順序位相群。

（註1）開区間の表現を，ここではつぎのようにする：

(1)　$\xi<\eta$に対し

$$]\xi, \eta[= \{\theta \mid \xi<\theta<\eta\}$$

(2)　$]\xi, \rightarrow[= \{\theta \mid \xi<\theta\}$

(3)　$]\leftarrow, \xi[= \{\theta \mid \theta<\xi\}$

（註2）$\mathfrak{U}_o(\xi)$ の導入を〈存在〉の導入のように考える必要はない。$\mathfrak{U}_o(\xi)$ の導入は記号"$\mathfrak{U}_o(\xi)$"の導入であり，そしてこの記号は，《"$V \in \mathfrak{U}_o(\xi)$"は"$V$は$\xi$が属する開区間"の言い換えである》として定義されるところのものである。

（註3）明らかにつぎのことが成り立つ：

(1)　$V \in \mathfrak{U}_o(\xi) \Longrightarrow \xi \in V$.

(2)　$V_1, V_2 \in \mathfrak{U}_o(\xi)$ に対し，$V \subset V_1$，$V \subset V_2$であるような$V \in \mathfrak{U}_o(\xi)$ が存在する．

(3)　$V \in \mathfrak{U}_o(\xi)$ は，つぎの条件を満たす或る$W \in \mathfrak{U}_o(\xi)$ を含む：《各$\eta \in W$に対し，$V_1 \in \mathfrak{U}_o(\eta)$ かつ$V_1 \subset V$となるV_1が存在する》.

（"⊂"は，"$S \subset T$"を"$\xi \in S \Longrightarrow \xi \in T$"と読ませるところの記号。）そして，(1)，(2)，(3)は，$\mathfrak{U}_o(\xi)$ をξの基本開近傍系とするような位相$\mathfrak{O}$を一意的に決めるところの条件である。$\mathfrak{O}$は順序位相と呼ばれる。

（註4）$]\eta, \zeta[\in \mathfrak{U}_o(\xi)$ は，$\rho=\min\{\xi-\eta, \zeta-\xi\}$ に対する$U(\xi, \rho)$を含む。$]\eta, \rightarrow[$ は，$\rho=\xi-\eta$に対する$U(\xi, \rho)$を含む。$]\leftarrow, \zeta[$ は，$\rho=\zeta-\xi$に対する$U(\xi, \rho)$を含む。

（註5）$U(-\xi, \rho)$は，この写像による$U(\xi, \rho)$の像と一致する。実際，$\eta<\xi+\rho$ならば $(-\eta)+\rho=\xi+\rho+(-\xi)+(-\eta)>\eta+(-\xi)+(-\eta)=-\xi$。$\eta+\rho<\xi$ならば，$-\eta=\xi+(-\xi)+(-\eta)>\eta+\rho+(-\xi)+(-\eta)=(-\xi)+\rho$。

3.3.2　算法の連続性

Nが自然数，分数（正の有理数），整数，有理数，正の実数，実数の集合である場合の数の系 (N，+，×) は，順序構造を伴う数の系であり，かつ順序位相に関して加法と乗法が，$N \times N$からNへの写像：

$$(\xi, \eta) \longmapsto \xi+\eta$$
$$(\xi, \eta) \longmapsto \xi \times \eta$$

として，ともに連続[註1]。

Nが分数，有理数，正の実数，実数の集合である場合，N^{*}からNへの写像：

$$\xi \longmapsto \xi^{-1}$$

は連続[註2]。特に，(N^{*}，×，≦) は順序位相群。

Nが有理数，実数の集合である場合，(N，+，×，≦) は順序位相体。

（註1）$\xi+\eta$ [$\xi \times \eta$] のρ-近傍に対しては，ξのρ_1-近傍とηのρ_2-近傍で，条件：《ξ'がξのρ_1-近傍に属し，η'がηのρ_2-近傍に属するとき，$\xi'+\eta'$ [$\xi'+$

η'］は$\xi+\eta$のρ-近傍に属する》
を満たすものがとれる。このことは，《加法＋［乗法×］は連続》の意味になる。

（註2）(1) $\xi \in N^{*+}$とする。このとき$\xi^{-1} \in N^{*+}$。$\varepsilon \leqq \xi^{-1}$である任意の$\varepsilon \in N^{*+}$に対し，$(\xi^{-1}+\varepsilon)^{-1}+\delta<\xi$となる$\delta \in N^{*+}$を任意にとる。このとき，写像：$\eta \longmapsto \eta^{-1}$によるU$(\xi,\ \delta)$の像はU$(\xi^{-1},\ \varepsilon)$に含まれる。

(2) $\xi \notin N^{*+}$のとき，＋は群算法で$\xi<0$，よって$\xi^{-1}<0$。$\xi^{-1}+\varepsilon<0$である任意の$\varepsilon \in N^{*+}$に対し，$(\xi^{-1}-\varepsilon)^{-1}<\xi+\delta$となる$\delta \in N^{*+}$を任意にとる。このとき，写像：$\eta \longmapsto \eta^{-1}$によるU$(\xi,\ \delta)$の像はU$(\xi^{-1},\ \varepsilon)$に含まれる。

4 数の系からの比の系と差の系の導出

分数および整数の系は，それぞれ自然数の系$\mathbb{N}$の比の系および差の系として，自然数から導出される。本章では，この導出を，数の系（N，＋，×）からのそれの比の系（N_R，＋，×）および差の系（N_D，＋，×）の導出として，一般的に論ずる。——ここで，Nの添え字の$_R$，$_D$は，それぞれ比 ***"Ratio"*** の ***'R'*** と差 ***"Difference"*** の ***'D'*** のつもりである。

4.1 比の系の導出としての数の系の拡張

4.1.1 比の系の意義

比の系は，これに応ずる量形式をもって，"稠密な量の系"の読みを可能にする。逆に，結果論として，"比"の発想に対しては《"稠密な量の系"の読みを可能にしたい》という要請がそれの契機として先行している。

4.1.2 比の導出のモデル

比の表現"自然数：自然数"では，同じ比に対して異なる表現が可能である。しかし同時に，

《$m:n$と$m':n'$が同じ比の表現であるためには，$m \times n'=m' \times n$ であること，あるいは同じこととして(註)，自然数a，b，k，k'で$m=k \times a$，$n=k \times b$，$m'=k' \times a$，$n'=k' \times b$となるものが存在することが，必要十分》

のきまりがある。

"比"の定式化は，この

"先ず《比》，そして《比を表現する自然数の対》，さらに《同じ比を表現する自然数の対の間に成立するきまり》"

の順序を逆立ちさせる。即ち，《同値な表現のきまり》で自然数の対を類別し，このときの類全体の集合として"比の集合"$\mathbb{N}_R$を定義する。

（註）(1) $m=k \times a$，$n=k \times b$，$m'=k' \times a$，$n'=k' \times b$のとき，$m \times n'=(k \times a) \times (k' \times b)=(k' \times a) \times (k \times b)=m' \times n$。

(2) 逆に，$m \times n'=m' \times n$のとき，mとnの最大公約数kと，m'とn'の最大公約数k'に対し，$m=k \times a$，$n=k \times b$，$m'=k' \times a'$，$n'=k' \times b'$とすれば，$k \times k' \times a \times b'=m \times n'=m' \times n=k \times k' \times a' \times b$。これより，$a \times b'=a' \times b$。$a$と$b$が互いに素だから，$b$は$b'$の約数。また，$a'$と$b'$が互いに素だから，$b'$は$b$の約数。よって$b=b'$，さらにこれから$a=a'$。

4.1.3 数の系（N，＋，×）からの比の集合N_Rの導出

自然数の系（$\mathbb{N}$，＋，×）からの$\mathbb{N}_R$の導出を一般化して言うと，以下のようになる。

数の系（N，＋，×）の×が可換であるとする。積集合$N^* \times N$の要素の間の関係〜を

$$(\xi,\ \eta) \sim (\xi',\ \eta') \iff \xi \times \eta'=\xi' \times \eta$$

で定義するとき，〜は$N^* \times N$の上の同値関係（Nの類別を実現する関係）になっている(註)。$N^* \times N$を〜で類別して得られる類の集合をN_Rと定義する。

N_Rの要素xに$(\xi,\ \eta) \in N^* \times N$が属するとき，$x$を，

$$\xi:\eta, \quad \eta/\xi, \quad \frac{\eta}{\xi}$$

などと表現する。また，$\xi:\eta$を"ξに対する

ηの比”と呼ぶ。

（註）$(\xi_1, \eta_1) \sim (\xi_2, \eta_2)$ かつ $(\xi_2, \eta_2) \sim (\xi_3, \eta_3)$ のとき，$\xi_1 \times \eta_2 = \eta_1 \times \xi_2$かつ$\xi_2 \times \eta_3 = \eta_2 \times \xi_3$。

(1)　$\eta_2 \in N^*$のとき：　$\xi_2 \times \eta_2 \in N^*$。一方，$\xi_1 \times \eta_2 \times \xi_2 \times \eta_3 = \eta_1 \times \xi_2 \times \eta_2 \times \xi_3$，さらに $(\xi_1 \times \eta_3) \times (\xi_2 \times \eta_2) = (\eta_1 \times \xi_3) \times (\xi_2 \times \eta_2)$。したがって，$\xi_1 \times \eta_3 = \eta_1 \times \xi_3$。

(2)　$\eta_2 = 0$のとき：　$\xi_1 \times \eta_2 = \eta_1 \times \xi_2$より$\eta_1 = 0$。また，$\xi_2 \times \eta_3 = \eta_2 \times \xi_3$より，$\eta_3 = 0$。よって，$\xi_1 \times \eta_3 = \eta_1 \times \xi_3 = 0$。

4.1.4　数の系としてのN_R

N_Rの要素に対しては，これを“倍”と読んだ上で，和と積（合成）を日常的に考えている。この二つの概念はつぎのように定式化される。

x，$y \in N_R$に対し，

$$x = \frac{s}{r} \quad y = \frac{t}{r}$$

となるr，s，$t \in N$がとれる。このとき，対象式$x+y$を$(s+t)/r$と定める。――x，yを上のように表現したときの$(s+t)/r \in N_R$は，r，s，tの取り方に依存していない(註1)から，この定義は意味をもつ。

x，$y \in N_R$に対してはまた，

$$x = \frac{s}{r} \quad y = \frac{t}{s}$$

となるr，s，$t \in N$がとれる。このとき，対象式$x \times y$をt/rと定める。――x，yを上のように表現したときの$t/r \in N_R$は，r，s，tの取り方に依存していない(註2)から，この定義は意味をもつ。

そしてこの定義から導かれる内算法＋，×に関して，N_Rは“数の系”になる。

（註1）$x = s/r = s'/r'$，$y = t/r = t'/r'$のとき，$(s+t) \times r' = (s \times r') + (t \times r') = (r \times s') + (r \times t') = r \times (s' + t')$，よって，$(s+t)/r = (s'+t')/r'$。

（註2）$x = s/r = s'/r'$，$y = t/s = t'/s'$のとき，$(t \times r') \times s = t \times s' \times r = (t' \times r) \times s$，よって$t \times r' = t' \times r$，即ち$t/r = t'/r'$。

4.1.5　N_Rの中へのNの埋め込み

算数科では，分数と自然数の使用場面を援用することで，分数に自然数を直接外挿する。しかしこれは本来，“N_Rの中へのNの埋め込み”のように主題化されねばならない主題である。

N_Rが量の係数の系と意味づけられているとき，“量のn回の累加”を量に対する$n \in N$の倍作用と考えれば，$n \in N$に関するn倍と$n/1$倍は同値である。このことを見て，“N_Rの中へのNの埋め込み”をつぎのような形で導入する。

写像$i: N \to N_R$を

$$i(n) = \frac{n}{1} \qquad (n \in N)$$

で定義するとき，iは1対1で，

$$i(m+n) = i(m) + i(n)$$
$$i(m \times n) = i(m) \times i(n)$$

が成り立つ。そこでこのiによって，$(N, +, \times)$ を $(N_R, +, \times)$ の部分 $(i(N), +, \times)$ と同一視できることになる。言い換えると，iによって，$(N, +, \times)$ は $(N_R, +, \times)$ に埋め込まれる。またこの意味で，N_RはNの拡張である。

$n \in N$の表記を，$i(n) \in N_R$の表記に流用する。

このとき，$1 \in N$はN_Rの単位元。また，$n \in N$に対し

$$n = n/1$$

であり，かつ $1/n$が×に関するnの逆元n^{-1}になる。

4.1.6　Nの要素間の除法を可能にする拡張

Nの拡張N_Rにおいては，任意のm，$n \in N \subset N_R$――但し，Nが零元0をもつときは$m \neq 0$――に対し，$m \times x = n$となるxが存在し，実際$x = n/m$である(註)。

いま，Nにおいて$m \times p = n$となるpを$n \dot{/} m$（“$n \div m$”）で表わすとしよう。$n \dot{/} m$は常には定義されない。しかし定義されるときには，N

のN_Rへの埋め込みにおいて，N_Rの要素n/mと一致する：

$$\dot{n/}m=n/m$$

以上の意味で，NのN_Rへの拡張に対しては，“Nの要素同士の除法を可能にする拡張” という見方が立つ。

（註）定義より，

$$m\times\frac{n}{m}=\frac{m}{1}\times\frac{n}{m}=\frac{n}{1}=n$$

4.1.7　系（N_R，＋，×，≦）

4.1.7.1　（N，＋，×，≦）からの（N_R，＋，×，≦）の導出

順序構造を伴う数の系（N，＋，×，≦）からは，N_Rが順序構造を伴う数の系（N_R，＋，×，≦）として，つぎのように導出される。

x，$y\in N_R$に対し，$x=s/r$，$y=t/r$となるr，s，$t\in N$が存在する。このとき，$x\leqq y$を$s\leqq t$で定義する。——x，yを上のように表現したときの条件$s\leqq t$は，r，s，tの取り方に依存していない(註)から，この定義は意味をもつ。そして，この≦はN_Rの上の全順序関係になる。

さらに，この≦に関して系（N_R，＋，×，≦）が順序構造を伴う数の系になる。

また，N_Rは≦に関して稠密である。

（註）$x=s/r=s'/r'$，$y=t/r=t'/r'$のとき，$(s\times t')\times(r\times r')=(s\times r')\times(t'\times r)=(r\times s')\times(t\times r')=(s'\times t)\times(r\times r')$，よって$s\times t'=s'\times t$。したがって，$s\leqq t$と$s'\leqq t'$は同値。

4.1.7.2　（N_R，＋，×，≦）の中への（N，＋，×，≦）の埋め込み

（N，＋，×，≦）と（N_R，＋，×，≦）の場合，埋め込みiについてはさらに

$$m\leqq n\implies i(m)\leqq i(n)$$

が成り立つ。そこでこのiによって，（N，＋，×，≦）を（N_R，＋，×，≦）の部分（$i(N)$，＋，×，≦）と同一視できることになる。言い換えると，iによって，（N，＋，×，≦）は（N_R，＋，×，≦）に埋め込まれる。

4.2　差の系の導出としての数の系の拡張

4.2.1　数の系の対称化——差の系の導出

数の系（N，＋，×）を拡張する考え方の一つに，“対称化” がある。ここで “対称化” とは，Nの各要素が加法＋に関して対称元をもつように——言い換えると，＋が群算法になるように——Nの系を拡張することである。そこでこの拡張は，《“正負の数” の導出》という形で実現されることになる。

数の系の対称化は，〈差の系〉の導出という形で実現できる。実際，《差$q-p$と$p-q$は対称》に着眼し，《数nを$p+n=q$となるp，qに対する$q-p$と同一視し，$p-q$をnの対称元とする》というのが “対称化” の方法である。

差の系の導出が “対称化” の意味を持ち得るのに対し，比の系の導出は持ち得ない。差の場合は，〈Nの要素の対（“差数”）から，〈対称化記号（正負の符号）とNの要素対〉（“正負の数”）へと表現を進めることができるのに対し，比の場合は，表現はNの要素の対（“比数”）にとどまる。これはつぎの理由による：

（N，＋，×）においては，任意の要素m，nに対し

$$m*k=n\quad あるいは\quad m=n*k$$

となる要素kが，$*$が＋の場合はつねに存在するが，$*$が×の場合は必ずしも存在しない．

4.2.2　対称的な数の系の意義

対称的な数の系は，これに応ずる量形式をもって，“対称的な量の系” の読みを可能にする。逆に，結果論として，“数の系の対称化” の発想に対しては《“対称的な量の系” の読みを可能にしたい》という要請がそれの契機として先行している。

4.2.3　差の導出のモデル

差の表現 “自然数−自然数” では，同じ差に

対して異なる表現が可能である。しかし同時に，

《$n-m$と$n'-m'$が同じ差の表現であるためには，$m+n'=m'+n$であることが必要十分》

のきまりがある。

差の数学化は，この

“先ず《差》，そして《差を表現する自然数の対》，さらに《同じ差を表現する自然数の対の間に成立するきまり》”

の順序を逆立ちさせる。即ち，《同値な表現のきまり》で自然数の対を類別し，このときの類全体の集合として（“差の集合”）$\mathbb{N}_D$を定義する。

4.2.4 数の系（N，＋，×）からの差の集合 N_Dの導出

自然数の系（$\mathbb{N}$，＋，×）からの$\mathbb{N}_D$の導出を一般化して言うと，以下のようになる。

数の系（N，＋，×）に対し，積集合$N\times N$の要素の間の関係～を

$$(m,\ n)\sim(m',\ n') \iff m+n'=m'+n$$

で定義する。このとき，～は$N\times N$の上の同値関係（Nの類別を実現する関係）になっている。$N\times N$を～で類別して得られる類の集合をN_Dと定義する。

N_Dの要素xはNの要素の対の類であるが，この類に対（m，n）が属するとき，xを（ここでは）$n-m$と表現する。

$n\in N$に対する類$n-n$を，0で表わす。

4.2.5 “正負の数”

Nの要素m，n，kに対し，$m+k=n$であるとき，$n-m$と$m-n$をそれぞれ$+k$，$-k$で表わす。数の系の条件（§3.1）より，N_Dの任意の要素xはNのある要素kに対して$+k$あるいは$-k$の形に表現される。――しかもkは一意である[註]。

Nに零元zが存在するとき

$$+z=-z=0$$

（註）(1)　$+m=+n$とする。$m+m=m+m$より，$+n=+m=(m+m)-m$。したがって，$m+n=m+m$。＋の可約性より，$m=n$。

(2)　同様に，$-m=-n$ならば$-n=-m=m-(m+m)$，よって$m+n=m+m$，さらに$m=n$。

4.2.6 数の系としてのN_D

N_Dの要素に対しては，これを“倍”と読んだ上で，和と積（合成）を日常的に考えている。この二つの概念はつぎのように定式化される。

m，n，$p\in N$に対し，

$$(+m)+(+n)=+(m+n)$$
$$(-m)+(-n)=-(m+n)$$
$$(+m)+(-n)=(-n)+(+m) = \begin{cases} +p & (m=n+p\text{のとき}) \\ -p & (m+p=n\text{のとき}) \\ 0 & (m=n\text{のとき}) \end{cases}$$

と定義する。これは，r，s，$t\in N$に対し

$$(r-s)+(t-r)=t-s$$

と定義するのと同じである[註1]；あるいは，m，n，p，$q\in N$に対し

$$(n-m)+(q-p)=(n+q)-(m+p)$$

と定義するのと同じである[註2]。

さらに，m，n，$p\in N$に対し，

$$(+m)\times(+n)=(-m)\times(-n)=+(m\times n)$$
$$(+m)\times(-n)=(-n)\times(+m)=-(m\times n)$$

と定義する。これは

$$(n-m)\times(q-p)=(m\times p+n\times q)-(m\times q+n\times p)$$

と定義するのと同じである[註3]。

N_Dは，この＋，×に関して“数の系”になる。

さらに，N_Dは加法＋に関して可換群となる。実際，0が加法＋の零元になり，また，$+k=n-m$と$-k=m-n$が互いに他の対称元（＋に関する逆元）になる。

$x\in N_D$に対し，xの対称元を$\hat{-}x$と書くとき，

以下が成り立つ(註4)：

(1)　$(\hat{-}x)+(\hat{-}y)=\hat{-}(x+y)$

(2)　$(\hat{-}x)\times y=x\times(\hat{-}y)=\hat{-}(x\times y)$

(3)　$(\hat{-}x)\times(\hat{-}y)=x\times y$

(註1)(1)　先ず，この定義がr，s，tの取り方に依存していないことを示す。$x=r-s=r'-s'$，$y=t-r=t'-r'$のとき，$(s+t')+(r+r')=(s+r')+(r+t')=(r+s')+(t+r')=(s'+t)+(r+r')$，よって，$s+t'=s'+t$。

(2)　さらに，このように定義される＋は可換である。実際，$(t-r)+(r-s)=((s+t)-(r+s))+((r+t)-(s+t))=(r+t)-(r+s)=t-s$。

(3)　＋が"$(r-s)+(t-r)=t-s$"で定義されるとき，

(3.1)　$+m=r-s$，$+n=t-r$のとき，$s+m+n=r+n=t$で，$t-s=+(m+n)$。

(3.2)　$-m=r-s$，$-n=t-r$のとき，$s=r+m=t+m+n$で，$t-s=-(m+n)$。

(3.3)　$+m=r-s$，$-n=t-r$のとき，

(3.3.1)　$m=n+p$では，$s+p+n=s+m=r=t+n$で，$t-s=+p$。

(3.3.2)　$m+p=n$では，$s+n=s+m+p=r+p=t+p+n$で，$t-s=-p$。

(3.3.3)　$m=n$では，$s+n=s+m=p=t+n$で，$t-s=0$。

(4)　＋が最初の形で定義されるときに

$$(r-s)+(t-r)=t-s$$

が成り立つことは，つぎのように場合分けして示すことになる：

	$r+n=t$	$r=t+n$
$r=s+m$	①	②
$r+m=s$	③	④

ここでは，③の場合だけを示しておく。

先ず，$r-s=-m$，$t-r=+n$，$s+n=r+m+n=t+m$。そこで，

(4.1)　$m=n+p$のとき，$s=t+p$で，$(-m)+(+n)=-p=t-s$。

(4.2)　$m+p=n$のとき，$s+p=t$で，$(-m)+(+n)=+p=t-s$。

(4.3)　$m=n$のとき，$s=t$で，$(-m)+(+n)=0=t-s$。

(註2)(1)　一般に$(r-s)+(t-r)=t-s$のとき，$(n-m)+(q-p)=((n+p)-(m+p))+((n+q)-(n+p))=(n+q)-(m+p)$。

(2)　逆に，$(n-m)+(q-p)=(n+q)-(m+p)$のとき，$(r-s)+(t-r)=(r+t)-(s+r)=t-s$。

(註3)　証明は，(註1)の証明に準じる。

(註4)(1)　$((\hat{-}x)+(\hat{-}y))+(x+y)=((\hat{-}x)+x)+((\hat{-}y)+y)=0+0=0$。

(2)　$((\hat{-}x)\times y))+(x\times y)=((\hat{-}x)+x)\times y=0\times y=0$。$(x\times(\hat{-}y))+(x\times y)=x\times((\hat{-}y)+y)=x\times y=0$。

(3)　(2)より，$(\hat{-}x)\times(\hat{-}y)=\hat{-}((\hat{-}x)\times y)=\hat{-}(\hat{-}(x\times y))=x\times y$。

4.2.7　N_Dの中へのNの埋め込み

N_Dが量の係数の系と意味づけられているとき，"量のn回の累加"を量に対する$n\in N$の倍作用と考えれば，$n\in N$に関するn倍と$(+n)$倍は同値である。このことを見て，"N_Dの中へのNの埋め込み"をつぎのような形で導入する。

写像$i：N\longrightarrow N_D$を

$$i(n)=+n \quad (n\in N)$$

で定義するとき，iは1対1で，

$$i(m+n)=i(m)+i(n)$$

$$i(m\times n)=i(m)\times i(n)$$

が成り立つ(註1)。そこでこのiによって，(N，＋，×)を$(N_D, +, \times)$の部分$(i(\mathrm{N}), +, \times)$と同一視できることになる。言い換えると，$i$によって，(N，＋，×)は$(N_D, +, \times)$に埋め込まれる。またこの意味で，$N_D$は$N$の拡張である。

$n\in N$に対し$i(n)$を$\hat{n}$で表わすとき，つぎが成り立つ：

$$\widehat{-n}=\hat{-}\hat{n}$$

$$n\hat{-}m=n\hat{+}(\hat{-}\hat{m})\text{(註2)}$$

(註1)(1)　$i(n)=i(m)$のとき，$(n+n)-n=+n=+m$より$n+n=n+m$，よって$n=m$。即

ち，iは1対1。

(2)　$i(m+n)=(m+m+n+n)-(m+n)=((m+m)-m)+(n+n)-n)=i(m)+i(n)$。

(3)　$i(m\times n)=((m+n)^2+m\times n)-(m+n)^2=((m+n)-n)\times((m+n)-m)=i(m)\times i(n)$。

(註2) (1)　$-n$は$+n=\hat{n}$の対称元。

(2)　$\hat{n}+(\hat{-}\hat{m})=(+n)+(-m)=((n+n)-n)+(m-(m+m))=(n+n+m)-(n+m+m)=n-m$。

4.2.8　Nの要素間の減法を可能にする拡張

いま，数の系$\mathfrak{N}$——NまたはN_D——の要素ξ，ηに対し$\xi+\zeta=\eta$となる$\zeta\in\mathfrak{N}$を，$\eta\dot{-}\xi$と書くことにする。

Nの拡張N_Dにおいては，任意のm，$n\in N$に対し$\hat{n}\dot{-}\hat{m}$が定義され，かつ

$$\hat{n}\dot{-}\hat{m}=n-m\ \ (=\hat{n}+(\hat{-}\hat{m}))$$

である(註)。

Nにおいては，$n\dot{-}m$は常には定義されない。しかし定義されるときには，

$$n\dot{-}m=n-m\ \ (=\hat{n}\dot{-}\hat{m}=\hat{n}+(\hat{-}\hat{m}))$$

以上の意味で，NのN_Dへの拡張に対しては，“Nの要素同士の減法を可能にする拡張”という見方が立つ。

(註) $\hat{m}+(\hat{n}+(\hat{-}\hat{m}))=\hat{n}$より，$\hat{n}\dot{-}\hat{m}=\hat{n}+(\hat{-}\hat{m})$。

4.2.9　記号の流用

ここまでは，概念を明確に区別する意味から，$\hat{-}$，$\dot{-}$の記号を導入してきた。しかし

(1)　$-n=\hat{-}\hat{n}$

(2)　Nにおいて$n\dot{-}m$が定義されるとき，

$$n\dot{-}m=n-m=\hat{n}\dot{-}\hat{m}$$

であることにより，記号$\hat{-}$，$\dot{-}$には$-$を流用できる。そして実際この流用は慣例になっている。

同一の記号を異なる意味に混用することは学習者にとって混乱とつまづきのもととなるが，強いて混用するのは形式的操作（“計算”）の便利のためである。以下でもこれに倣っていく(註)。

(註) したがって記号‘$-$’にはつぎの三通りの用法がある：

(1)　N_Dの要素の表現“$n-m$”

(2)　N_Dの要素xの対称元の表現“$-x$”

(3)　NまたはN_Dにおける，$m+p=n$であるときのpに対する表現“$n-m$”

4.2.10　系 (N_D，$+$，$\times$，$\leqq$)

4.2.10.1　(N，$+$，$\times$，$\leqq$) からの (N_D，$+$，$\times$，$\leqq$) の導出

順序構造を伴う数の系 (N，$+$，$\times$，$\leqq$) からは，N_Dが順序構造を伴う数の系 (N_D，$+$，$\times$，$\leqq$) として，つぎのように導出される。

x，$y\in N_D$に対し，$x=s-r$，$y=t-r$となるr，s，$t\in N$が存在する(註1)。このとき，$x\leqq y$を$s\leqq t$で定義する。——x，yを上のように表現したときの条件$s\leqq t$は，r，s，tの取り方に依存していない(註2)から，この定義は意味をもつ。そして，この$\leqq$はN_Dの上の全順序関係になる。

さらに，この$\leqq$に関して系 (N_D，$+$，$\times$，$\leqq$) が順序構造を伴う数の系になる(註3)。

>0である元を正元，<0である元を負元と呼ぶ。

$x\in N_D$が正元であることと，$-x$が負元であることとは，同値。

m，$n\in N$に対し，

$$m<n \iff n-m>0$$
$$m=n \iff n-m=0$$
$$m>n \iff n-m<0$$

が成り立つ。

(註1) p，p，q，$q'\in N$に対し，$q-p=(q+p')-(p+p')$，$q'-p'=(p+q')-(p+p')$。

(註2) $x=s-r=s'-r'$，$y=t-r=t'-r'$のとき，$(s+t')+(r+r')=(s+r')+(t'+r)=(r+s')+(t+r')=(s'+t)+(r+r')$，よって$s+t'=s'+t$。したがって，$s\leqq t$と$s'\leqq t'$は同値。

(註3) $x=n-m$，$y=n'-m$，$z=q-p$とする

と，$x+z=(n+q)-(m+p)$，$y+z=(n'+q)-(m+p)$。$x\leqq y$のとき$n\leqq n'$で，これより$n+q\leqq n'+q$。よって，$x+z\leqq y+z$。

4.2.10.2 $(N_D, +, \times, \leqq)$ の中への $(N, +, \times, \leqq)$ の埋め込み

$(N, +, \times, \leqq)$ と $(N_D, +, \times, \leqq)$ の場合，埋め込みiについてはさらに

$$m\leqq n \implies i(m)\leqq i(n)$$

が成り立つ[注1]。そこでこのiによって，$(N, +, \times, \leqq)$ を $(N_D, +, \times, \leqq)$ の部分 $(i(N), +, \times, \leqq)$ と同一視できることになる。言い換えると，iによって，$(N, +, \times, \leqq)$ は $(N_D, +, \times, \leqq)$ に埋め込まれる。

$(N, +)$ が群でないとき，$i(N)$はN_Dの正元全体と一致し[注2]，特にN_Dの負元はある$n\in N$に対する$-n$である。

（註1）$m\leqq n$のとき，$i(m)=(m+m+n)-(m+n) \leqq (n+n+m)-(m+n)=i(n)$。

（註2）$n\in N$に対し，$i(n)=(n+n)-n>n-n=0$。また，N_Dの正元は$m<n$であるm，$n\in N$に対する$n-m$の形に書けるが，$m+k=n$とするとき$n-m=+k=i(k)$。

4.3 比／差の系の導出の閉性

4.3.1 $(N_R)_D$と$(N_D)_R$の同型性（$=N_{RD}$）

学校数学では，Nの要素m，nに対する$(N_R)_D$の要素$\pm(n/m)$ と $(N_D)_R$の要素 $(\pm n)/(+m)$ の同一視を暗黙に導入する。これは本来，"$(N_R)_D$と$(N_D)_R$の同型" という主題になる。

実際，

$$i\left(\pm\frac{n}{m}\right)=\frac{\pm n}{+m} \quad \text{（複合同順）}$$

$$i(0)=0$$

で定義される写像$i: (N_R)_D \longrightarrow (N_D)_R$は，$((N_R)_D, +, \times)$ の $((N_D)_R, +, \times)$ の上への同型になっている[註]。

即ち，$(N_R, +, \times)$ からの $((N_R)_D, +, \times)$ の導出と，$(N_D, +, \times)$ からの $((N_D)_R, +, \times)$ の導出では，実質的に同じ対象がつくられる。

（註）(1) 先ず，

$$\frac{+n}{-m}=\frac{-n}{+m}, \qquad \frac{-n}{-m}=\frac{+n}{+m}$$

であるので，写像$j: (N_D)_R \longrightarrow (N_R)_D$が

$$j\left(\frac{\pm n}{+m}\right)=\pm\frac{n}{m} \quad \text{（複号同順）}$$

で定義でき，かつこれはiの逆写像になる。

(2) あとは，

$$j(x+y)=j(x)+j(y)$$
$$j(x\times y)=j(x)\times j(y)$$

が確かめられればよい。

$$j\left(\frac{+s}{+m}+\frac{+t}{+m}\right)=j\left(\frac{+(s+t)}{+m}\right)$$
$$=+\frac{s+t}{m}=+\left(\frac{s}{m}+\frac{t}{m}\right)$$
$$=\left(+\frac{s}{m}\right)+\left(+\frac{t}{m}\right)$$
$$=j\left(\frac{+s}{+m}\right)+j\left(\frac{+t}{+m}\right)$$

また，

$$j\left(\frac{+s}{+m}+\frac{-t}{+m}\right)=j\left(\frac{(+s)+(-t)}{+m}\right)$$

において例えば$s+p=t$ならば，$s/m+p/m=t/m$であるから，上式はつぎのように続く：

$$=j\left(\frac{-p}{+m}\right)=-\frac{p}{m}=\left(+\frac{s}{m}\right)+\left(-\frac{t}{m}\right)$$
$$=j\left(\frac{+s}{+m}\right)+j\left(\frac{-t}{+m}\right)$$

残りについては，省略する。

4.3.2 $(N_R)_R$とN_Rの同型性

学校数学では，Nの要素m，n，p，qに対する$(N_R)_R$の要素 $(n/m)/(q/p)$ とN_Rの要素 $(n/m)\times(q/p)^{-1}$ $(=(n\times p)/(m\times q))$ の同一視を暗黙に導入する。これは本来，"$(N_R)_R$とN_Rの同型" という主題になる。

実際，

$$i\left(\frac{n}{m}\Big/\frac{q}{p}\right)=\frac{n\times p}{m\times q}$$

で定義される写像i：$(N_R)_R \longrightarrow N_R$は，$((N_R)_R, +, \times)$ の $(N_R, +, \times)$ の上への同型になっている。――これの逆同型は，

$$j\left(\frac{n}{m}\right)=\frac{n}{1}\Big/\frac{m}{1}$$

で定義される写像j：$N_R \longrightarrow (N_R)_R$(註)。

即ち，$(N_R, +, \times)$ からの $((N_R)_R, +, \times)$ の導出では，実質的に，新しい対象はつくられない。

（註）(1)　先ず，jはiの逆写像：

$$ji\left(\frac{n}{m}\Big/\frac{q}{p}\right)=j\left(\frac{n\times p}{m\times p}\right)=\frac{n\times p}{1}$$

$$=\frac{n\times p}{m}\Big/\frac{m\times q}{1}=\frac{n}{m}\Big/\frac{q}{p}$$

$$ij\left(\frac{n}{m}\right)=i\left(\frac{n}{1}\Big/\frac{m}{1}\right)=\frac{n\times 1}{1\times m}=\frac{n}{m}$$

(2)　$$j\left(\frac{n}{m}+\frac{p}{m}\right)=j\left(\frac{n+p}{m}\right)=\frac{n+p}{1}\Big/\frac{m}{1}$$

$$=\left(\frac{n}{1}+\frac{p}{1}\right)\Big/\frac{m}{1}=j\left(\frac{n}{m}\right)+j\left(\frac{p}{m}\right)$$

$$j\left(\frac{n}{m}\times\frac{p}{n}\right)=j\left(\frac{p}{m}\right)=\frac{p}{1}\Big/\frac{m}{1}$$

$$=\frac{n}{1}\Big/\frac{m}{1}\times\frac{p}{1}\Big/\frac{n}{1}=j\left(\frac{n}{m}\right)\times j\left(\frac{p}{n}\right)$$

4.3.3　$(N_D)_D$とN_Dの同型性

学校数学では，Nの要素nに対する $(N_D)_D$の要素$\pm(+n)$ $(=\mp(-n))$ とN_Dの要素$\pm n$の同一視を暗黙に導入する。これは本来，“$(N_D)_D$とN_Dの同型”という主題になる。

実際

$i(\pm(+m))=\pm m$　（複号同順）

$i(0)=0$

で定義される写像i：$(N_D)_D \longrightarrow N_D$は，$((N_D)_D, +, \times)$ の $(N_D, +, \times)$ の上への同型になっている(註)。

即ち，$(N_D, +, \times)$ からの $((N_D)_D, +, \times)$ の導出では，実質的に，新しい対象はつくられない。

（註）(1)　先ず，$+(-m)=-(+m)$，$-(-m)=+(+m)$ より，iは定義できる。そして

$j(\pm m)=\pm(+m)$　　（複号同順）

で定義される写像j：$N_D \longrightarrow (N_D)_D$が$i$の逆写像になる。

(2)　$j((+m)+(+n))=j(+(m+n))$
$=+(+(m+n))=+((+m)+(+n))$
$=(+(+m))+(+(+n))=j(+m)+j(+n)$

$j((-m)+(-n))=j(-(m+n))$
$=-(+(m+n))=-((+m)+(+n))$
$=(-(+m))+(-(+n))=j(-m)+j(-n)$

$j((+m)+(-n))$ は，$m+p=n$のときは$(+m)+(+p)=(+n)$ より，
$=j(-p)=-(+p)=(+(+m))+(-(+n))=j(+m)+j(-n)$

同様に，$m=n+p$のときも，$=j(+m)+j(-n)$ を得る。そして，$m=n$のときは$+m=+n$より，

$=j(0)=0=(+(+m))+(-(+m))$
$=j(+m)+j(-n)$

4.3.4　$(N_{RD})_R$，$(N_{RD})_D$，N_{RD}の同型性

一般に$(N_D)_R$と$(N_R)_D$が同型であることから，$((N_R)_D)_R$と$((N_R)_R)_D$は同型。一方，$(N_R)_R$とN_Rの同型は，$((N_R)_R)_D$と$(N_R)_D$の同型を導く。結局，$((N_R)_D)_R$と$(N_R)_D$は同型。

$(N_D)_R$と$(N_R)_D$の同型は，$((N_D)_R)_D$と$((N_R)_D)_D$の同型を導く。一方，一般に$(N_D)_D$とN_Dが同型だから，$((N_R)_D)_D$と$(N_R)_D$は同型。結局，$((N_D)_R)_D$と$(N_R)_D$は同型。

学校数学では，

$$\frac{-1}{3}-\frac{4}{5}=\frac{-1}{3}+\frac{-4}{5}=\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{4}{5}\right)$$

のような等式変形が導入されるが，これの第一項は $((\mathbb{N}_D)_R)_D$の要素，第二項は$(\mathbb{N}_D)_R$の要素，そして第三項は$(\mathbb{N}_R)_D$の要素である。