寄　　稿

「わり算」「割合」の概念整理＊

宮　下　英　明＊＊

要　約

「わり算」「割合」のことばは，未だ概念整理がよくできていない状態で算数数学教育の論にのぼってくる。この概念整理に＜感覚＞を持ち込まず論理的に行うよい方法は，数を一般的に考えることである。概念整理をややこしくしている原因の一つに，「割合論争」で「数＝量 (数は量の抽象)」を立場とする側から出された似非論理の用語法がある。正しくは「数＝割合 (数は量の比)」なのであるが，これはすぐれて数学の内容になるので，簡単には身につかない。「数＝割合」をやっているつもりで「数＝量」をやってしまうことになる。教育現場でも，感覚的に入りやすい「数＝量」の方がえらばれている。

キーワード：わり算の意味，割合論争

1. はじめに

本学会誌算数教育 57-1 に，杉山吉茂氏の「わり算は包含除――割合の理解の素地として」と題する論が載っている (杉山 (2008))。この論に対し，わたしは氏が論をスタートする地点よりさらに溯ったところでの「わり算」「割合」の論が必要であると思った。それは「わり算」「割合」の概念整理ということになる。

わたしはこの論を，厳に概念整理にとどめ，できるだけ簡潔に述べようと思う。特に，論を指導法の話へ進めることは，論点を拡散させないという理由から，行わない。

2.「わり算」は，数一般において定義される

「わり算」について「包含除・等分除」のことばが使われているときには，自然数が念頭にある。一方，「わり算」は数一般において定義される。

対象式としての「n ÷ m」は，「mとかけてnになる数」を意味する。

mとかける場合，順序に２通りでてくる。m × ○＝ n と ○ × m＝n である。

○を「n ÷ m」と表すということには，「×」が可換であるということが含意されている：

m×○＝○×m＝n

「n÷m」

数の論は，自然数，分数，正負の数，複素数，四元数，‥‥と進められるが，「×」の可換性は四元数になると「数の条件」ではなくなる。特に，対象式「n ÷ m」は四元数になると無意味になる。

3. 数のいろいろは，量のいろいろに応じている

数は２量の比を表現するものとしてつくられる。そして，食材によって包丁を替えるように，量に応じてつごうのよい数がつくられる。

自然数を使う量では，「個」と呼ばれる「部分を考えない量」を想定したが，「任意に部分を考

＊平成 20 年３月７日受付，平成 20 年３月 14 日決定
＊＊北海道教育大学教授

えられる量」を扱いたくなったときに，分数がつくられる。

さらに,正逆２方向(１次元自由)の量(イメージとしては直線上のベクトル)を扱いたくなって，正負の数がつくられる。２次元自由の量(イメージとしては平面上のベクトル)を扱いたくなって，複素数がつくられる。３次元自由の量を扱いたくなって,四元数がつくられる。――といった具合である。

4. 数は「割合」であり,「割合」以外ではない

２量の比を表現する数は,「もとにする量のどれだけ」という形の量表現に使われるものになる。このときの「どれだけ」のところに数がくる。

「量ａに対する量ｂの比はｎ」は「ｂはａのｎ倍」に転じる。「割合」「比」「倍」は，同じことの異なる言い回しであり，これの表現が数である。

杉山氏が言及している「割合論争」に引き寄せて言えば，数は「割合」であり,「割合」以外ではない。

5.「割合論争」

「割合論争」は何の論争であったかというと,「数＝量の比」と「数＝量(数は量の抽象)」の論争である。

数学なら,「数＝量の比」に軍配をあげることになる。しかし，学校数学に実質入っていったのは,「数＝量」の方であった。

6. 量は「外延量と内包量」ではない

数の和は,「ａのm倍の量とａのｎ倍の量を合わせると，ａの○倍」の「○」を表現する対象式として導入される。――自然数，分数，正負の数，複素数，‥‥ の和は，この条件を満たすように定義される。

(ａのm倍)と(ａのｎ倍)の和 ＝ ａの○倍

「m＋ｎ」

よって，数を使うことが前提の量は，はじめから加法を考えている。

特に,「速さ」も，加法を考える。実際，物理ではあたりまえに速さの足し算をする。(「速さの違う汽車を連結できない」という話の落ちは,「速さを足せない」ではない。)

7. 量は数を通して対象化される

「割合論争」では,「数＝量」の側から「数は抽象，量は具体」が言われた。「量には内包量と外延量がある」もこの感覚で言われたことである。

しかし,「どれが量か？」と問われて「これが量だ」と指させるものは存在しない。「３メートル」は「３メートルのひも」のことではない。

また，３メートルの長さのものがこの世にあるかどうかに関係なく,「３メートル」を意識に対象化することはできる。思考は,「メートル」と数を素材にして,「長さ」という量を概念的に構築する。

つぎのように言うことができる：「言語が存在をつくる」と同じ意味で「数が量をつくる」。

実際，量は，自然数を使うべく対象化すれば離散になり，分数を使うべく対象化すれば稠密になり，正負の数を使うべく対象化すれば正逆２方向になる。

8. わり算は「包含除と等分除」ではない

数は２量の比(「倍」)を表現する。そして，数の積は,「量ａのm倍のさらにｎ倍にあたる量は，ａの○倍」の「○」を表現する対象式として導入される。――自然数，分数，正負の数，複素数，‥‥ の積は，この条件を満たすように定義される。

(ａの m倍)の ｎ倍 ＝ ａの ○倍

「m×ｎ」

「ｎ ÷ m」は「mとかけてｎになる数」を意味するが,「mとかけてｎになる」には m × ○＝ｎ と ○ × m＝ｎ の２通りがある。

数が自然数のとき，m × ○＝ｎ から「ｎ ÷ m」が立式される算数の問題は，つぎのようなものである：

１クラスm人なら，何クラスでｎ人？

また，○ × m＝ｎ から「ｎ ÷ m」が立式される算数の問題は，つぎのようなものである：

１クラス何人なら，mクラスでｎ人？

$m \times \bigcirc = n$ が立式される問題と $\bigcirc \times m = n$ が立式される問題は，見掛けがかなり（劇的に？）違ってくる。そこで，前者のタイプの問題に対するわり算の立式が伝統的に「包含除」と呼ばれ，後者の場合が「等分除」と呼ばれてきた。

数が分数のときは，$m \times \bigcirc = n$ から「$n \div m$」が立式される問題は，つぎのようなものである：

mメートルの何倍がnメートルか？

また，$\bigcirc \times m = n$ から「$n \div m$」が立式される問題は，つぎのようなものである：

何メートルのm倍がnメートルか？

確認：「mメートルの○倍がnメートル」から「$m \times \bigcirc = n$」が導かれる論理はつぎのようになる：mメートルはメートルのm倍。よって，mメートルの○倍は，メートルのm倍の○倍。積の定義から，メートルのm倍の○倍はメートルの（$m \times \bigcirc$）倍。mも○も量の比である。

この段階になると，「等分除・包含除」という対立のさせ方も無意味になる。

「$n \div m$」に「包含除・等分除」の２つの意味があるのではない。「$n \div m$」が立式される問題の構造には，$m \times \bigcirc = n$ で応じるものと $\bigcirc \times m = n$ で応じるものの２通りがある。ここが要点である。

杉山氏の論文には「7. あえて包含除と見る」の章があるが，このような立論をするより前に，「等分除・包含除」という擬似論理の用語がミス・リーディングであるという点を，先ず見ていく必要がある。

9.「量×量」というものはない

「数＝量（数は量の抽象）」にすると，数の代数的構造を量でも考えねばならなくなる。特に，数には「×」があるので「量×量」をむりやり考え出そうとする。

われわれの方としては，「量×量」の言い回しに出会ったら，「変だぞ」「その×は何だ？そんなの知らないぞ」というふうにリアクションできるようでなければならない。

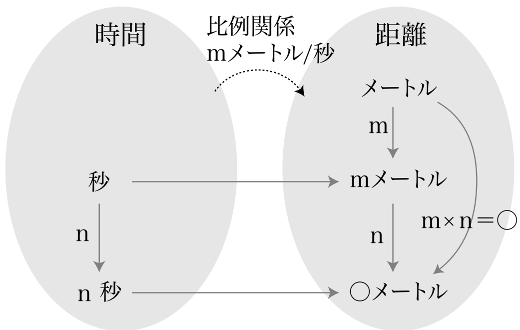
例えば，「速さ×時間」を考えてみよう。速さと時間のイメージからは，「×」など想像のしようがない。想像できない「×」をどうして受けいれているのか？自らを欺しているのである。

実際，「速さ×時間」を指導されようとしている生徒がそのとき知っている「×」は，数の「×」のみである。そして，数の「×」のみであることが正しい。「速さ×時間」の「×」は，数の「×」を誤解したものである。

このときの数の「×」は，つぎのように導かれる：

距離の単位に「メートル」を，時間の単位に「秒」をとる。このとき速さの単位に「メートル／秒」をとれば（「メートル／秒」をとったときに限り），「m メートル／秒でn秒では，○メートル」の「○」に対して「$m \times n$」が立式される。

理由：「m メートル／秒」の意味は，「秒にmメートルが対応する比例関係（時間と距離の間の比例関係）」である。n秒は秒のn倍。「比例関係」の定義により，時間の側のn倍には距離の側のn倍が対応する。よって，n秒に対応する距離は，mメートルのn倍。「mメートル」は「メートルのm倍」。よって，「mメートルのn倍」は，メートルのm倍のn倍。数の積の定義より，これはメートルの（$m \times n$）倍。



「速さ×時間」の言い回しは，この論理的プロセスをとばして結果だけを拾ったものである。

「速さ×時間」は，自然法則かその種のものとして，すんなりひとに受けいれられる。「速さ×時間」の「×」の意味には，ひとは躓かない。

10.「1と見る」は使う必要（使う場面）がない

「量aを1と見るとき量bはどれだけ？」という言い回しで「どれだけ」にあたる数を生徒に求めさせる。学校現場では，このことが「割合を求

めさせる」ことと解釈されているようである。

しかし, この場合は単に「量 b は量 a の何倍？」と問えばよい。

「1 と見る」は，論理的に何も機能していない。では，なぜ「1 と見る」が出てきたか？

これは,「数＝量 (数は量の抽象)」の考えから出てくる。すなわち,「量 a を 1 に抽象するとき，量 b はどんな数に抽象されるか？」という考え方をしているわけである。

11.「関係概念は難しい」

「数＝量の比」であり,「数＝量」ではない。しかし,「数＝量の比」は，内容がまともに数学になり，簡単には身につかない。実際,「数＝割合」の立場をとっているつもりで「数＝量」をやっていることが，普通のようにある。

学校数学では，ずっと「数＝量」がリードしてきている。「数＝割合 (関係概念)」の論理は学校現場では敷居が高い。「数＝量 (対象概念)」が受けいれられたのも,「やさしく感じられる」がいちばん大きな理由であろう。

例：速さ

速さは，時間と距離の間の比例関係である。比例関係は，＜比例関係全体の集合を考え，これに量構造を入れる＞ということをやって，量にすることができる。すなわち，比例関係の n 倍，比例関係と比例関係の和が，できるようになる。この内容は，大学数学でやるものになる。

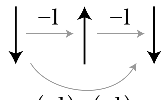
しかし，数学教育では,「速さ:比例関係 → 量」の順序性とその論理は, 問題意識に上らない。「比例関係 (関係概念) はむずかしい」の方に意識が向く。そして，早々に小学校で速さを量 (対象概念) にする。

12. 現行の数指導はしのぎでやっている

「数＝量」は間違いであり, したがって「数＝量」の指導は本来成り立つはずのないものである。実際,「数＝量」の現行指導は成り立っているのではなく，ごまかしごまかしで論理の矛盾をしのいでいる。

この数指導は，中学の「正負の数」の段階になるとほんとうにいびつなものになる。

例えば, $(-1)\times(-1) = +1$ はつぎのように単純なことである：



$(-1)\times(-1) = +1$

しかしこれを「量 × 量」に解釈しようとするので,「西に 1 km/ 時で歩いたら 1 時間前には基準時刻の位置から東に何 km」みたいなわけのわからない導入問題を，むりやりつくったりすることになる。

13. おわりに

この小論は,「わり算」「割合」の簡単な概念整理を目的としたものである。実際には，この「概念整理」の内容をきちんと述べようとすると, けっこう大部な論になる (宮下 (2007), 宮下 (2004))。

なお,「数＝量の比」と「数＝量」のうち正しいのは「数＝量の比」であるが, 学校現場には「数＝量」がすっかり定着している。これを揺るがすことは，ほとんど絶望的に難しい。――部分的アプローチが立てられない，抜本的な変更の話になる，そして，アウトプットに関して連続性を重視する学校教育に＜抜本的変更＞話は馴染まない。

「割合論争」のときが，いわゆる「そのとき歴史が動いた」であった。和田義信の「数＝割合」対遠山啓の「数＝量」の構図の論争の後，学校数学に入っていったのは「数＝量」の方であった。――数学の視点からは，このような解釈になる。

参考文献

杉山吉茂 (2008)：わり算は包含除――割合の理解の素地として , 日本数学教育学会誌算数教育 57-1, pp.2-8.

宮下英明 (2007)：「数とは何か？」への答え , http://m.iwa.hokkyodai.ac.jp/meb/number/number_what/

宮下英明 (2004)：いろいろな数がつくられるしくみ , http://m.iwa.hokkyodai.ac.jp/meb/number/number_make/

宮下英明 (2007)：四元数 , http://m.iwa.hokkyodai.ac.jp/me/subjects/number/quaternion/