# 「ホモロジー群」とは何か

Ver. 2023-12-29

宮下英明 著

文中の青色文字列は，ウェブページへのリンクであることを示しています。



# 「ホモロジー群」とは何か

## 本書について

本書は，

http://m-ac.jp/

のサイトで書き下ろしている『「ホモロジー群」とは何か』を PDF 文書の形に改めたものです。

# 目　次


0.　導入

0.1　本テクストの理由
0.2「ホモロジー群」のことばはミスリーディング
0.3「ホモロジー群の計算」？
0.4「ホモロジー群」は，何をしようとするもの？

1　ホモロジー加群の方法

1.1　閉曲面を三角面複体に同相変換（「*三角形分割*」）

1.2　三角面複体上経路の代数構造化
1.2.1　有向辺の和——$\mathbb{Z}$加群 $C_1$ の導入
1.2.2　サイクル——$\mathbb{Z}$加群 $C_0$ の導入
1.2.3　バウンダリサイクル——$\mathbb{Z}$加群 $C_2$ の導入

1.3　ホモロジー加群の導入
1.3.1　バウンダリ写像 $\partial_2, \partial_1$
1.3.2　ホモロジー加群 $H_1 = Ker(\partial_1)/Im(\partial_2)$

1.4　ホモロジー加群の計算
1.4.1「計算」は，$Ker(\partial_1)/Im(\partial_2)$ の基底の導出
1.4.2　$Ker(\partial_1)/Im(\partial_2)$ の基底の導出手順

2.　トーラスのホモロジー加群

2.1　トーラス上の周回のタイポロジー
2.2　トーラスの三角形分割
2.3　$C_1$ の基底を定める（「*辺の向きを定める*」）
2.4　$C_2$ の基底を定める（「*面の向きを定める*」）
2.5　$\partial_1$ の表現行列
2.6　$\partial_2$ の表現行列
2.7　ホモロジー加群 $H_1$ の基底

3.　球面のホモロジー加群

3.1　球面上の周回のタイポロジー
3.2　球面の三角形分割
3.3　$C_1$ の基底を定める（「*辺の向きを定める*」）





2.4　$C_2$ の基底を定める（「*面の向きを定める*」）
2.5　$\partial_1$ の表現行列
2.6　$\partial_2$ の表現行列
2.7　ホモロジー加群 $H_1$ の基底

3.　球面のホモロジー加群

3.1　球面上の周回のタイポロジー
3.2　球面の三角形分割
3.3　$C_1$ の基底を定める（「*辺の向きを定める*」）
3.4　$C_2$ の基底を定める（「*面の向きを定める*」）
3.5　$\partial_1$ の表現行列
3.6　$\partial_2$ の表現行列
3.7　ホモロジー加群 $H_1 = 0$

4.　閉じ

4.0.　おわりに

# 「ホモロジー群」とは何か

本文イラスト，ページレイアウト，表紙デザイン：著者

## 0.　導入

0.1　本テクストの理由
0.2 「ホモロジー群」のことばはミスリーディング
0.3 「ホモロジー群の計算」？
0.4 「ホモロジー群」は，何をしようとするもの？





## 0.1　本テクストの理由

本テクストは，読者として，数学を勉強している/してきたひとを想定する。
「ホモロジー群」の主題は，数学の素地が一定程度あって入ることのできるものである。

「ホモロジー群」を勉強するところは大学の数学科ということになる。
そしてそこは，学生が「ホモロジー群」からドロップアウトするところである。
なぜか？
授業が「ホモロジー群」を教えるものになっていないからである。

教員は，教えているつもりで授業しているのでは？
そうである。
しかし，＜教えているつもり＞は，＜教えている＞ではない。
数学の教員は，だいたいが＜教える＞を知らない。
さらにいえば，数学ができる者ほど＜教える＞ができない。

> これは，「ディレンマ」の問題である。
> 数学の脳力があることは，＜わからない＞がわからないことである。よって，＜教える＞ができない。
> ＜教える＞ができるのは＜わからない＞をわかっているからだが，＜わからない＞がわかっているとは，数学ができないということである。

というわけで，「ホモロジー群」がわかるテクストを試すことにした。

数学がわかるテクストの要諦は，＜冗長＞である。
ひとが何かをわかることは，その何かの＜冗長＞を通じてわかるのである。
相手の使っていることばの意味がわからないとき，「ちょっとパラフレーズしてくれないか」と頼むことになるが，その「パラフレーズ」の意味は「冗長化」である。

> 人間は，ビッグデータを食って，概念を獲得していく。
> AI には，これをさせている。

一方，＜冗長＞は，数学の理論構築が斥けるところである。
数学を教える大学教員は，このスタイルに慣らされている。
よって，授業もこのスタイルでやってしまう。

> いまは少しはマシになっているのだろうが，昔の大学の数学の授業は，定義と定理の繰り返しであった。
> 数学の理論構築をそのまま授業にしていたわけである。

また，＜冗長＞が実現されない理由には，つぎのこともある：

＜冗長＞は贅沢

実際，紙媒体のテクストは，コストの関係から＜冗長＞をやれない。

しかし「＜冗長＞は贅沢」の問題に限れば，これはデジタルの時代には解決される。
＜冗長＞の贅沢は，やろうと思えばいくらでもやれる。

本テクストの理由は，＜冗長＞の実現である。
わかるために必要な＜冗長＞をやってみよう，というわけである。

と，威勢よく言ってみたものの，実際どこまで行けるかは不明。
なにぶん，目がダメになってきた。
添字だの記号だのが細々してくる数学のテクストは，つくるのが一苦労なのである＾＾；





## 0.2 「ホモロジー群」のことばはミスリーディング

「ホモロジー群」のことばに出遭う者は，「ホモロジー群」の「群」を，群論の謂う「群」だと思う。

「ホモロジー群」の「群」は，群論の謂う「群」ではない。
これは，整数環上の加群である。
整数環の数学記号 $\mathbb{Z}$ を使っていえば，$\mathbb{Z}$ 加群である。

「加群」は，「線型空間」の条件を緩くした代数的構造である。
線型空間のスカラーの代数的構造が体なのに対し，加群のスカラーの代数的構造は，体より緩い環である。
実際，「ホモロジー群」に出てくるスカラーは，整数である。

本テクストでは，以下，「ホモロジー群」を「ホモロジー加群」と言い換えることにする。
こんな言い換えをするテクストは他にないであろうが，誤解させることばを使うのは学習者のためにならない。
「ホモロジー群」を群論の謂う「群」と誤解させてよくなることは，何もない。
「ホモロジー加群」のことばを使うべきなのである。

## 0.3 「ホモロジー群の計算」？

「ホモロジー群」のテクストには，「ホモロジー群の計算」のことばが出てくる。
「ホモロジー群の計算」は，何をするとこれをしたことになるのか？
これが，学習者にはわからない。
そのテクストが，何をすることが「ホモロジー群の計算」をしたことになるのかを，明示的に言ってくれないからである。

「ホモロジー群の計算」は，ホモロジー加群の学習の実践的ゴールに位置づく。
よってこのことばの意味を不明にした学習は，自分がどこに進もうとしているのかがわからない学習になる。

そこで，これの意味をここで予め記しておくことにする。
これから出てくる内容を記すわけなので，内容がわからなくてけっこうである。
これをすることが「ホモロジー群の計算」をしたことになるのだ，を受け取ってくれればよい。

ホモロジー加群が導かれるコンテクストは，つぎのものである：

$$0 \to C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \to 0$$

$C_2, C_1, C_0$ は $\mathbb{Z}$ 加群。
$\partial_2, \partial_1$ は準同型写像で，つぎが条件：

$$Im(\partial_2) \subset Ker(\partial_1)$$

ここで，つぎの加群 $H_1$ を (1次) ホモロジー加群と定義する：

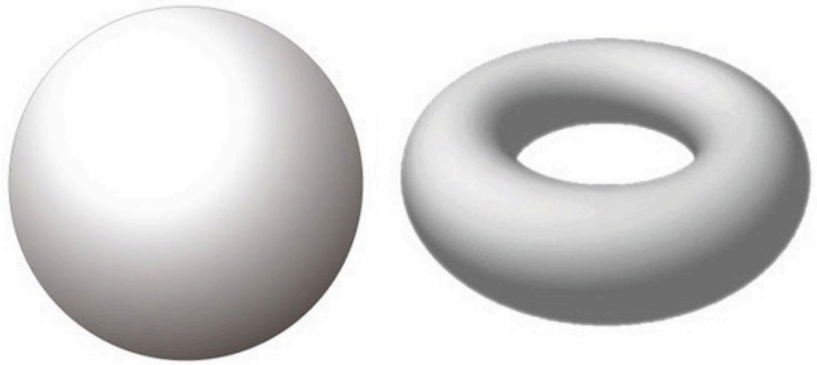
$$H_1 = Ker(\partial_1)/Im(\partial_2)$$

「ホモロジー群の計算」とは，$Ker(\partial_1), Im(\partial_2)$ の次元を求め，$H_1$ を $\approx 0$，$\approx \mathbb{Z}$，$\approx \mathbb{Z}^2$ のような形に表すことである。





## 0.4 「ホモロジー群」は，何をしようとするもの？



ひとは上の２つの閉曲面——球面とトーラス——を，タイプの違うものとして観る。
ホモロジー加群は，ひとのこの直観に数学的表現/裏付けを与えようとする探求の中から，出て来たものである。
翻って，ホモロジー加群は何をするものかというと，閉曲面の分類をするものである。

数学は推理の自動機械である。
ホモロジー加群を使った閉曲面の探求が開始されると，ひとの直観が及ばなかったものを示してくるようになる。
ひとはこれを「本質」と呼ぶ。

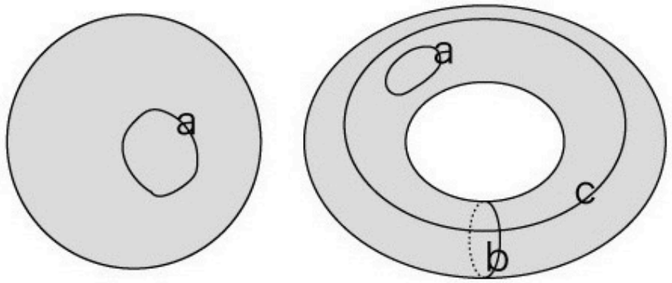
> 数学は，卑近の本質を捉える道具として人が発明し，開発してきたものである。
> 数学と疎遠でいるのは，もったいないことなのである。

さて，閉曲面の本質的違いを捉えようとするホモロジー加群の方法は，どのようなものか？

トーラスには穴がある。
これが球面との決定的違いになっている。
では，穴とは何か？
数学に感心してしまうのは，これにきっちり表現を与えてしまうことである。

曲面の上で一回りしてみる。
球面の場合，一周経路には内と外ができる。
トーラスでは，内と外ができる経路のほかに，内と外ができない経路が２通りと

れる：

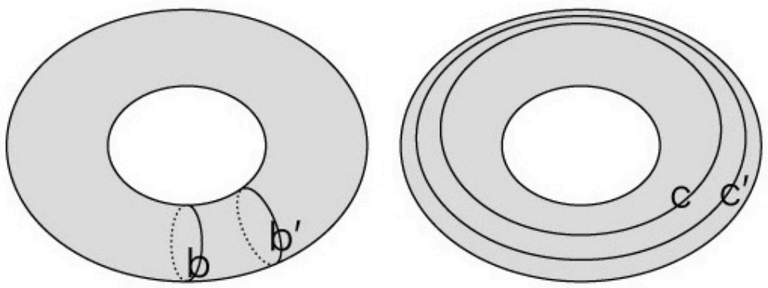



そこで，タイプの違う経路を数学的に表現できればよさそうだ，となる。

一周経路を「サイクル」と呼ぶことにする。
内と外ができるサイクルを，面のバウンダリ (境界) になるサイクルと捉える。
タイプａのサイクルはバウンダリサイクルで，タイプｂ，ｃのサイクルはバウンダリサイクルではない。

こうして，サイクルの中にバウンダリサイクルがあるかどうか，あればそれはいくつのタイプに分かれるかで，閉曲面の分類ができそうな感じになってきた。
しかしまだ雲をつかむような感じである。

雲をつかむような感じなのは，サイクルが定まらないためである。
例えば，つぎのｂとｂ′，ｃとｃ′は，それぞれ同じ扱いになるはずのものなので，１つにしなければならない。




といった問題を解決していって，ホモロジー加群の発明に至る。
ホモロジー加群は，「サイクルの中にバウンダリサイクルがあるかどうか，あればそれはいくつのタイプに分かれるか」が，これを見ればわかるしくみになっている。

## 1　ホモロジー加群の方法

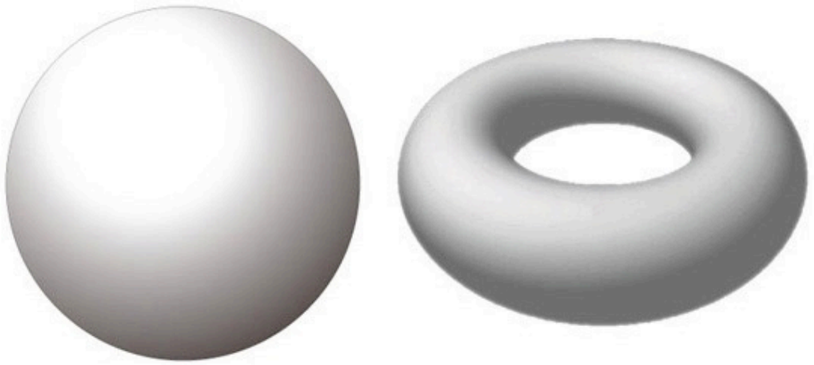
1.1　閉曲面を三角面複体に同相変換（「*三角形分割*」）
1.2　三角面複体上経路の代数構造化
1.3　ホモロジー加群の導入
1.4　ホモロジー加群の計算





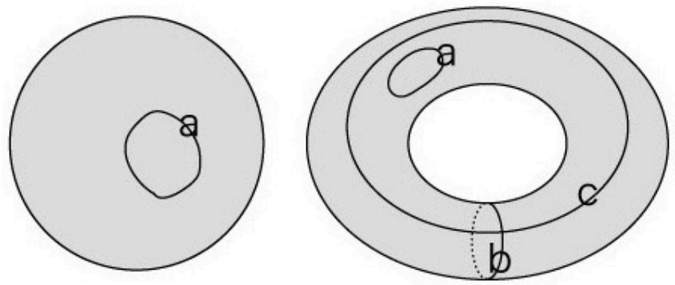
## 1.1　閉曲面を三角形複体に同相変換（「*三角形分割*」）

われわれの課題は，「閉曲面の分類」である。
閉曲面を分類したくなるのは，つぎの二つの閉曲面――球面とトーラス――を見せられると，これを区別したい衝動が沸々と沸き上がるからである＾＾；



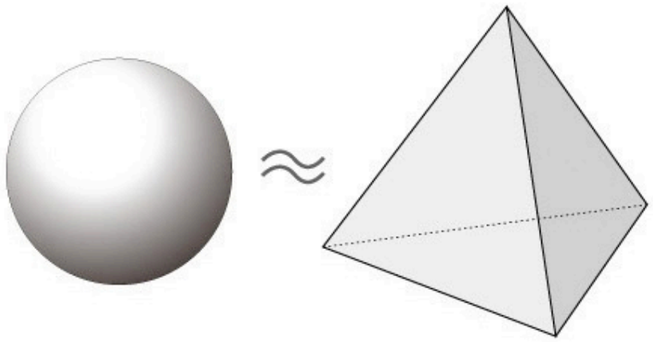
では，どんなことばを用いて区別するか？
「*トーラスには，球面には無い穴がある*」？
しかしこれには，「*穴って何よ*」が返ってくる。
実際，問題は「穴」を特徴づけることばである。

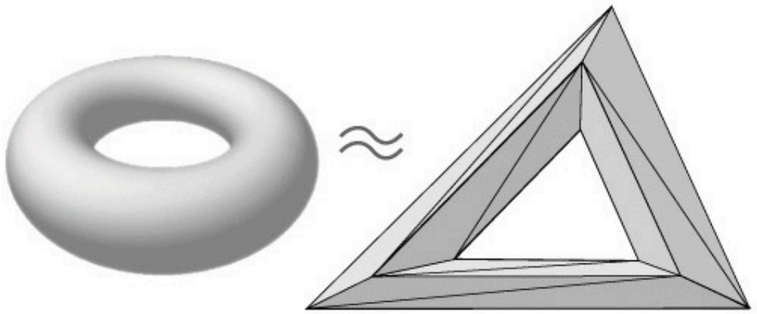
ここで，「穴」を特徴づけることばを「*閉曲面上の周回のタイプ*」とする。
トーラスには，球面には無い周回のタイプを見て取れるからである：




しかし，このタイプを述べる仕方――集合・構造のことばを用いて述べる仕方――が，定まらない。
{ 周回 } が無限集合になることも，これの一因。
「周回のタイプに着目した閉曲面の特徴づけ」は雲を摑むような話になる。
さて，どうするか？

アイデアは「三角形分割」——閉曲面を三角形複体に変換：

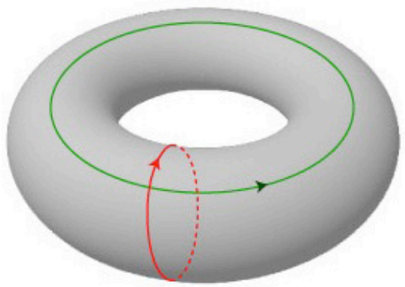




この変換の意図は，閉曲面上の経路を，三角形複体上の辺の組——「チェイン」——に変換することである。
閉曲面上の周回は無限にあるが，＜三角形の辺を伝って周回＞——「サイクル」——なら有限である。
そして有限なら，「虱潰し」の方法がとれる。
「周回のタイプに着目した閉曲面の特徴づけ」は，もう雲を摑むような話でなくなる。

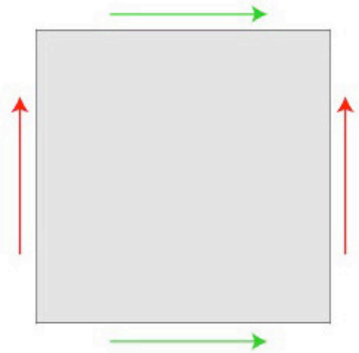
---

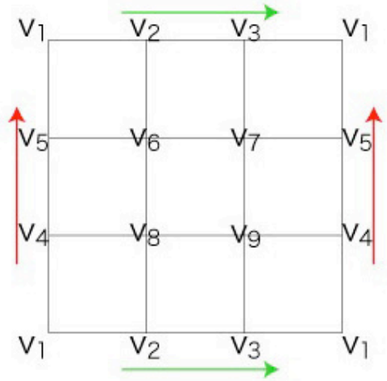
上に示したトーラスの三角形分割は，つぎの手順で作成：

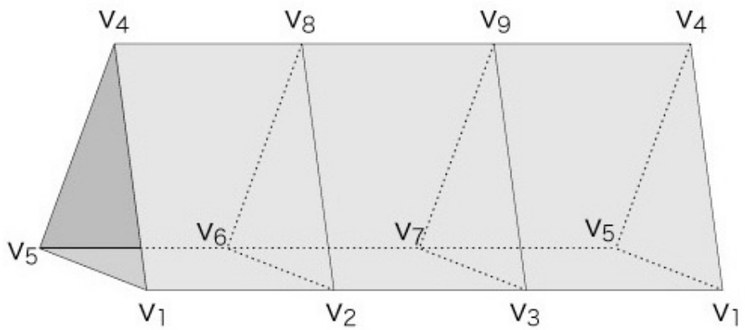


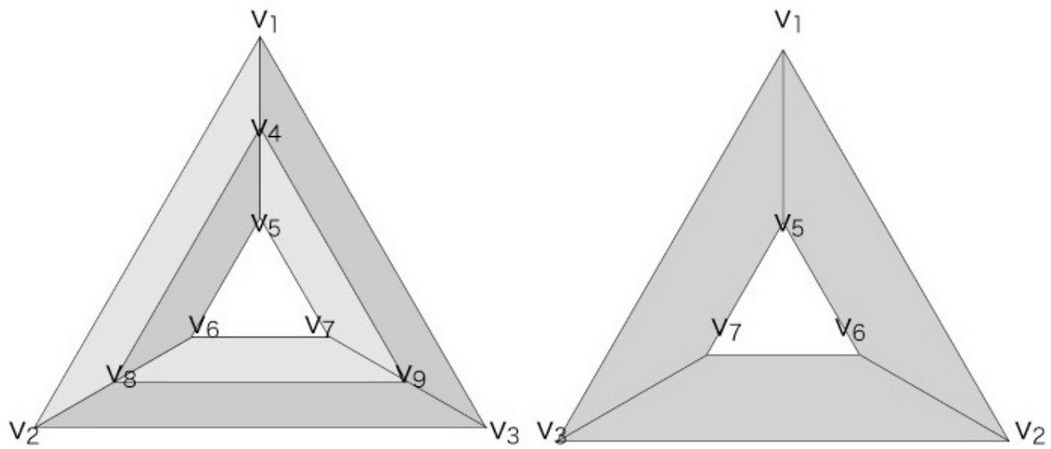


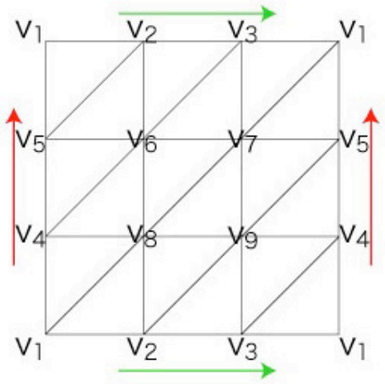


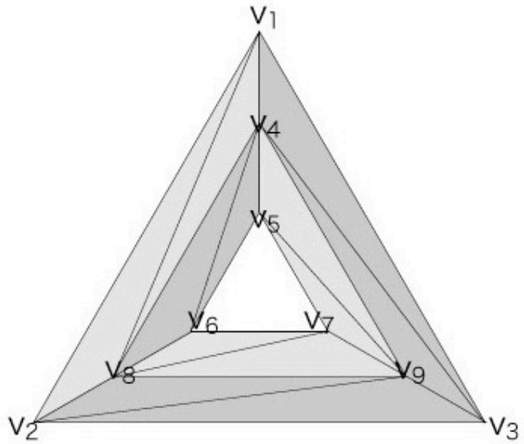


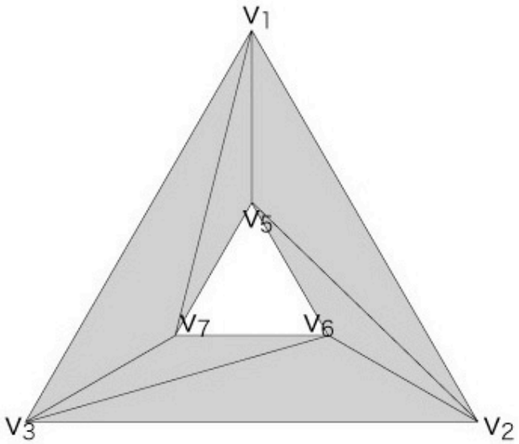






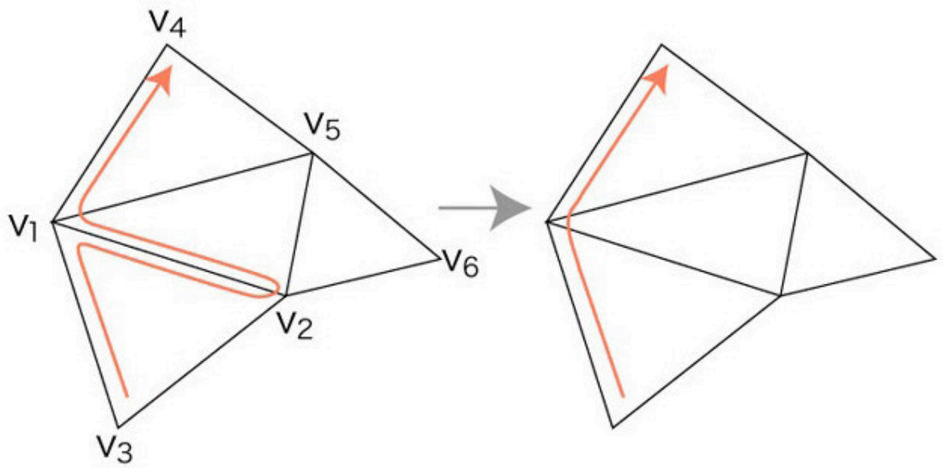


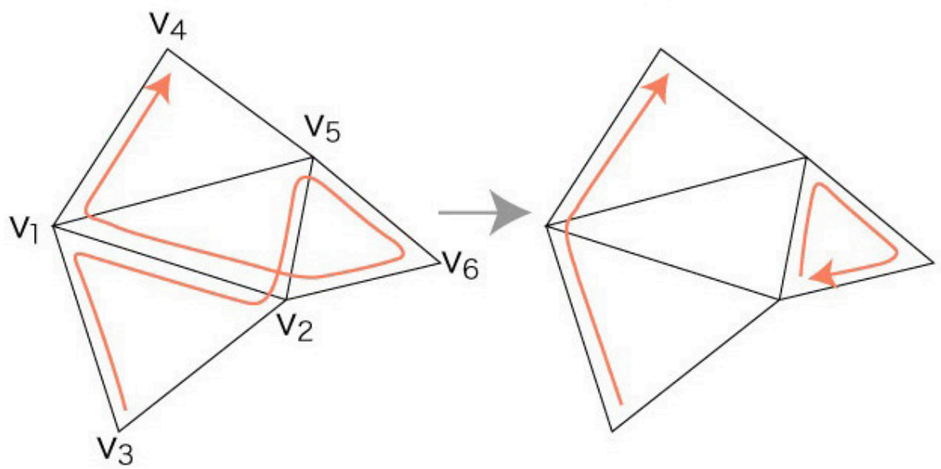

1.2　三角面複体上経路の代数構造化
1.2.1　有向辺の和——$\mathbb{Z}$加群 $C_1$ の導入
1.2.2　サイクル——$\mathbb{Z}$加群 $C_0$ の導入
1.2.3　バウンダリサイクル——$\mathbb{Z}$加群 $C_2$ の導入

### 1.2.1　有向辺の和——$\mathbb{Z}$加群 $C_1$ の導入

閉曲面の三角形分割は，閉曲面上の経路を三角形複体上のチェインに表現しようとするものである。
経路は，辺の組で表現できるはずである。
ほんとに？

チェインでは，「通った辺を後から逆方向に通る」が要所になる。
チェインの縮約になったり，サイクルを分離することになるからである。




チェインの表現は，このキャンセルを表現するものになっていなければならない。
辺の組だけなら，チェインの中に同じ辺が２つあるとき，それがキャンセルになるのかそうでないのかがわからない。

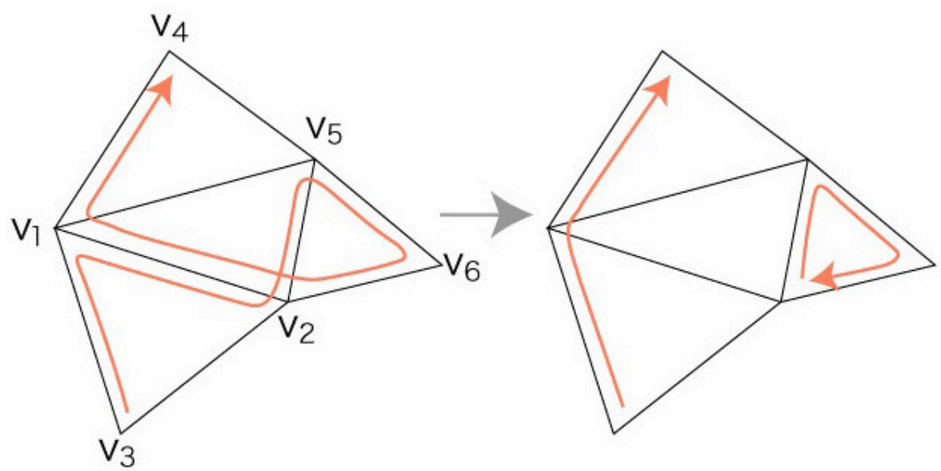




では，どうしたらよい？
有向辺の組にする。

さらに，つぎのようにすると，チェインの表現を短縮したり，チェインの縮約を代数的に計算することが，できるようになる：

1. 有向辺の組を，有向辺の和の形に表す。
2. $\overrightarrow{v_jv_k}$ の逆 $\overrightarrow{v_kv_j}$ を $-\overrightarrow{v_jv_k}$ で表す。
3. 有向辺 $\overrightarrow{v_iv_j}$ の $n$ 個の和を，$n\,\overrightarrow{v_iv_j}$ で表す。
   $n\left(-\overrightarrow{v_iv_j}\right)$ を $(-n)\,\overrightarrow{v_iv_j}$ と書く。




$$
\begin{aligned}
&\overrightarrow{v_3v_1}+\overrightarrow{v_1v_2}+\overrightarrow{v_2v_5}+\overrightarrow{v_5v_6}+\overrightarrow{v_6v_2}+\overrightarrow{v_2v_1}+\overrightarrow{v_1v_4}\\
=&\left(\overrightarrow{v_3v_1}+\overrightarrow{v_1v_4}\right)+\left(\overrightarrow{v_1v_2}+\overrightarrow{v_2v_1}\right)+\left(\overrightarrow{v_2v_5}+\overrightarrow{v_5v_6}+\overrightarrow{v_6v_2}\right)\\
=&\left(\overrightarrow{v_3v_1}+\overrightarrow{v_1v_4}\right)+\left(\overrightarrow{v_1v_2}+\left(-\overrightarrow{v_1v_1}\right)\right)+\left(\overrightarrow{v_2v_5}+\overrightarrow{v_5v_6}+\overrightarrow{v_6v_2}\right)\\
=&\left(\overrightarrow{v_3v_1}+\overrightarrow{v_1v_4}\right)+\left(\overrightarrow{v_2v_5}+\overrightarrow{v_5v_6}+\overrightarrow{v_6v_2}\right)
\end{aligned}
$$

了解？
数学科の学生は，了解してしまう。
中学数学以来，「逆は－」「合わせるは＋」に馴らされてきているからである。
ここは，「この －, ＋ は何？」と問うところである。

－, ＋ の導入は，つぎのことをしたのである：

「有向辺で生成される $\mathbb{Z}$ 加群を導入」

導入した $\mathbb{Z}$ 加群を，１次チェイン加群と呼び，$C_1$ と表記する。
「１次」のことばと添え数「１」は辺の幾何学的次元１を指しているが，これをことさ

ら記すのは，この後に

　　0次チェイン加群 $C_0$

　　2次チェイン加群 $C_2$

を導入することになるからである。

$C_1$ の要素を，改めて「チェイン」と呼ぶ。
これまでは「辺の連結」がチェインのイメージだったが，ここからのチェインはこれではないことに注意。

　　例えば，チェイン $\overrightarrow{v_1v_2}+\overrightarrow{v_3v_4}$ は，辺の連結ではない。

辺を並べただけのチェインにどんな意味がある？
心配は無用。
辺を並べただけのチェインに，意味は求めない。
実際に扱うことになるのは，サイクル——辺を連結して一周——である。
しかし，サイクルの定位や計算をしようとすると，領域がチェーンまで拡がる。
「辺を並べただけのチェーン」の導入となるのは，このためである，

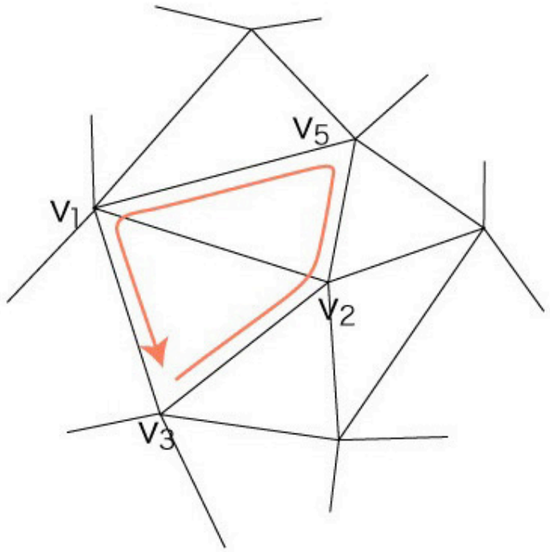




## 1.2.2　サイクル——$\mathbb{Z}$加群 $C_0$ の導入

一巡するチェインを，サイクルと呼ぶ。

一巡を現す有向辺の和は，「ベクトルの和」に見立てると0になる。
実際，これがサイクルの特徴づけになる。




$$\overrightarrow{v_3v_2}+\overrightarrow{v_2v_5}+\overrightarrow{v_5v_1}+\overrightarrow{v_1v_3}=\overrightarrow{v_3v_3}=0$$

この式に倣って，つぎの代数を導入する：

$$\begin{aligned}&(v_2-v_3)+(v_5-v_2)+(v_1-v_5)+(v_3-v_1)\\=\ &v_2+(-v_3)+v_5+(-v_2)+v_1+(-v_5)+v_3+(-v_1)\\=\ &0\end{aligned}$$

ここで $-,+$ の導入は，つぎのことをしたのである：

　　「頂点で生成される $\mathbb{Z}$ 加群を導入」

導入した $\mathbb{Z}$ 加群を，0次チェイン加群と呼び，$C_0$ と表記する。
「0次」のことばと添え数「0」は，頂点の幾何学的次元0を指す。

頂点 $v_i$ に対する $v_i, -v_i \in C_0$ の意味を問うことは無用である。
$C_0$ は，チェイン $\sum\overrightarrow{v_iv_j}$ がサイクルかそうでないかを，$\sum(v_j-v_i)$ が0

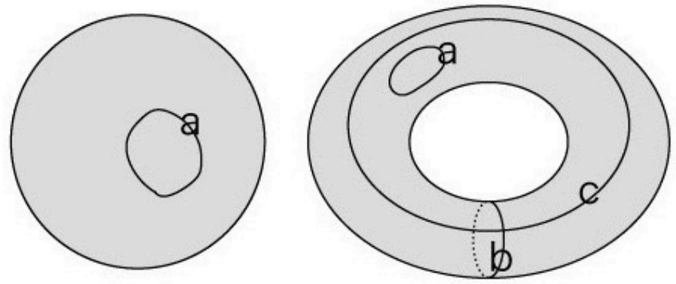
になるかならないかでわかるようにしようとするとき，自ずとつくってしまうものである。





### 1.2.3　バウンダリサイクル——$\mathbb{Z}$加群 $C_2$ の導入

トーラスには，球面には無い周回のタイプを見て取れる：

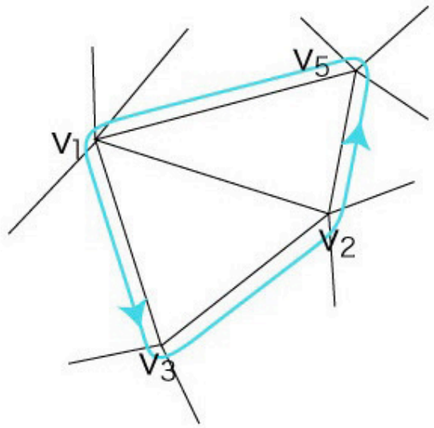



$a$ のタイプはどの閉曲面にもあり，これは「面の境界になっている」で特徴づけられる。

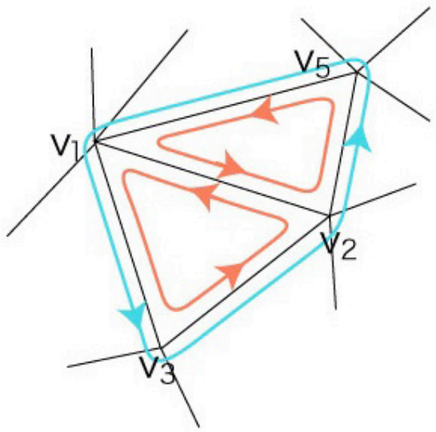
閉曲面における「周回が面の境界になっているかどうか」は，三角面複体では「サイクルが面の境界になっているかどうか」になる。
面の境界になっているサイクルを，バウンダリサイクルと呼ぶ。
「周回が面の境界になっているかどうか」は，ここに「サイクルがバウンダリサイクルかどうか」の表現を得る。

さて，サイクルがバウンダリサイクルかどうかは，面の表現ができてからの話である。
面は，辺を共有する三角形のつくる面である。
この面は，有向面にする必要がある。
サイクルが，$\mathbb{Z}$ 加群 $C_1$ の要素として，有向だからである。

有向面を，頂点をたどる順番で表そう。
つぎのように：




$$(v_3v_2)(v_2v_5)(v_5v_1)(v_1v_3) \ \Big( = (v_1v_3)(v_3v_2)(v_2v_5)(v_5v_1)$$
$$= (v_5v_1)(v_1v_3)(v_3v_2)(v_2v_5) \ = (v_2v_5)(v_5v_1)(v_1v_3)(v_3v_2) \ \Big)$$




$$\begin{aligned} & (v_3v_2)(v_2v_1)(v_1v_3) + (v_1v_2)(v_2v_5)(v_5v_1) \\ = \ & (v_1v_3)(v_3v_2)(v_2v_1) + (v_1v_2)(v_2v_5)(v_5v_1) \\ = \ & (v_1v_3)(v_3v_2)(v_2v_5)(v_5v_1) \end{aligned}$$

$$(v_3v_2)(v_2v_1)(v_1v_3) = -(v_3v_1)(v_1v_2)(v_2v_3)$$

上の $+, -$ の導入は，つぎを含蓄している：

「有向面で生成される $\mathbb{Z}$ 加群を導入」

導入した $\mathbb{Z}$ 加群を，２次チェイン加群と呼び，$C_2$ と表記する。
「２次」のことばと添え数「２」は，面の幾何学的次元２を指す。





1.3　ホモロジー加群の導入
1.3.1　バウンダリ写像 $\partial_2, \partial_1$
1.3.2　ホモロジー加群 $H_1 = Ker(\partial_1)/Im(\partial_2)$

## 1.3.1　バウンダリ写像 $\partial_2, \partial_1$

有向辺 $\overrightarrow{v_i v_j} \in C_1$ のバウンダリを，$v_j - v_i \in C_0$ で表現した。
$C_1, C_0$ はそれぞれ有向辺，有向頂点が生成する $\mathbb{Z}$加群なので，このバウンダリ対応は $C_1$ から $C_0$ への準同型写像—— $\partial_1$ で表す——を生成する。
実際，

$$c = \sum_k n_k \, \overrightarrow{v_{k1} v_{k2}} \in C_1$$

に対し

$$\partial_1(c) = \partial_1\Big(\sum_k n_k \, \overrightarrow{v_{k1} v_{k2}}\Big) = \sum_k n_k \, \partial_1\big(\overrightarrow{v_{k1} v_{k2}}\big) = \sum_k n_k \, (v_{k2} - v_{k1})$$

三角面の境界になるバウンダリサイクル $\overrightarrow{v_i v_j} + \overrightarrow{v_j v_k} + \overrightarrow{v_j v_k} \in C_1$ は，有向三角面 $(v_i v_j)(v_j v_k)(v_j v_k) \in C_2$ のバウンダリということになった。
$C_2, C_1$ はそれぞれ有向三角面，有向辺が生成する $\mathbb{Z}$加群なので，このバウンダリ対応は $C_2$ から $C_1$ への準同型写像—— $\partial_2$ で表す——を生成する。
実際，

$$c = \sum_k n_k \, (v_{k1} v_{k2})(v_{k2} v_{k3})(v_{k3} v_{k1}) \in C_2$$

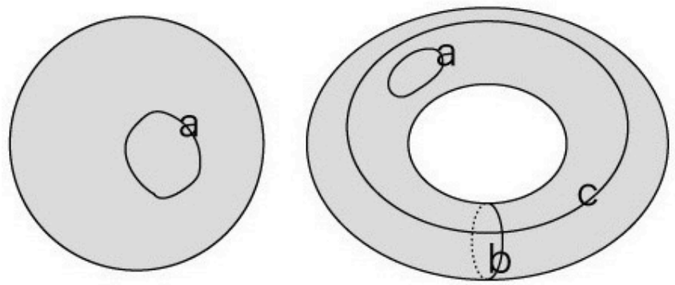
に対し

$$\begin{aligned}\partial_2(c) &= \partial_2\Big(\sum_k n_k \, (v_{k1} v_{k2})(v_{k2} v_{k3})(v_{k3} v_{k1})\Big) \\ &= \sum_k n_k \, \partial_2\big((v_{k1} v_{k2})(v_{k2} v_{k3})(v_{k3} v_{k1})\big) \\ &= \sum_k n_k \, \big(\overrightarrow{v_{k1} v_{k2}} + \overrightarrow{v_{k2} v_{k3}} + \overrightarrow{v_{k3} v_{k1}}\big)\end{aligned}$$

$\partial_1, \partial_2$ を，バウンダリ写像と呼ぶ。

## 1.3.2　ホモロジー加群 $H_1 = Ker(\partial_1)/Im(\partial_2)$

トーラスには，球面には無い周回のタイプを見て取れる：



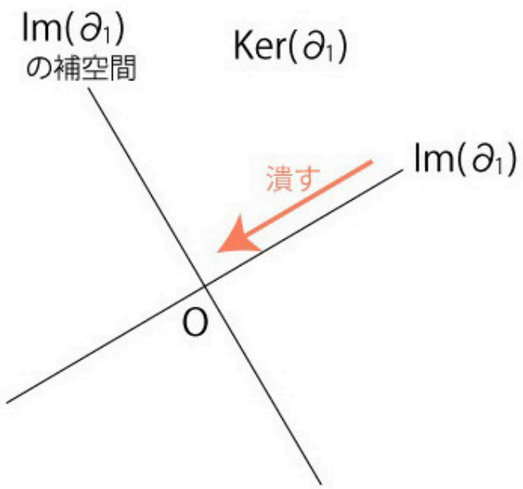

$a$ のタイプはどの閉曲面にもあり，これは「面の境界になっている」で特徴づけられる。

われわれは，閉曲面を三角面複体に同相変換して，周回をサイクルに，$a$ タイプの周回をバウンダリサイクルに表現した。
こうして，「$a$ タイプ以外のタイプ」は「バウンダリサイクルでないサイクル」の話になる。
そしていま，「バウンダリサイクルでないサイクル」を捉える段にまでやって来た。

サイクルは，バウンダリが 0 になるチェインである。
よって，$Ker(\partial_1)$ がこれを捉えていることになる。
バウンダリサイクルは，面のバウンダリになるサイクルである。
よって，$Im(\partial_2)$ がこれを捉えていることになる。

$Ker(\partial_1), Im(\partial_2)$ は，$\mathbb{Z}$加群 $C_1$ の部分空間であり，$Ker(\partial_1) \supset Im(\partial_2)$ である。
こうして，「バウンダリサイクルでないサイクルを捉える」は，「$Ker(\partial_1)$ の中の $Im(\partial_2)$ の補空間を捉える 」である。

$Ker(\partial_1)$ の中の $Im(\partial_2)$ の補空間とは，$Ker(\partial_1)$ の中で $Im(\partial_2)$ の次元を潰したものである。
イメージとして：




「$(x, y)$ 座標を $y$ 座標に射影」の感じである。

「$Ker(\partial_1)$ の中で $Im(\partial_2)$ の次元を潰す」は，$Im(\partial_2)$ の基底が $Ker(\partial_1)$ の基底の部分になっている場合である。
ホモロジー加群を導入しこれの基底を求めることは，「$Im(\partial_2)$ の基底を $Ker(\partial_1)$ の基底の部分にし，そしてこれを潰す」と同じである。

☞ トーラスのホモロジー加群 $H_1$ の基底

ホモロジー加群は，「商空間」で定義される：

$$H_1 = Ker(\partial_1)/Im(\partial_2)$$

「$Im(\partial_2)$ の基底を $Ker(\partial_1)$ の基底の部分にし，そしてこれを潰す」を「商空間 $Ker(\partial_1)/Im(\partial_2)$ の基底」の話にすることには，つぎのメリットがある：，

- 「商空間」の方が概念として一般的であり，既存の商空間論を利用できる。
- 「商空間」の方が，記述がラク。——推論を構造化しやすい。

われわれがやろうとすることは，「ホモロジー加群の基底を求める」である。
バウンダリサイクルでないサイクルのタイプは，ホモロジー加群の基底がこれを表すことになる。
「バウンダリサイクルでないサイクルを捉える」は，つぎが結論の形になる：

「タイプが〇個あり，各タイプの代表元は ‥‥ 」





1.4　ホモロジー加群の計算
1.4.1 「計算」は，$Ker(\partial_1)/Im(\partial_2)$ の基底の導出
1.4.2 $Ker(\partial_1)/Im(\partial_2)$ の基底の導出手順

## 1.4.1 「計算」は，$Ker(\partial_1)/Im(\partial_2)$ の基底の導出

「ホモロジー加群の計算」は，$Ker(\partial_1)/Im(\partial_2)$ の基底を導出することが，これの内容である。





## 1.4.2 $Ker(\partial_1)/Im(\partial_2)$ の基底の導出手順

$Ker(\partial_1)/Im(\partial_2)$ の基底の導出手順を，以下に記す。
これは，概観である。
ここまで本テクストを読み進めてきた読者は，「けっこうやることあるなあ」くらいに受け取ってくれたらよい。——理解しようとする必要はない。
逆に，これまでに「ホモロジー群」に触れた経験のある読者は，「ホモロジー群の計算」の意味/内容に対する自分の理解があっているかどうかを，ここでチェックしてみるとよい。

$Ker(\partial_1)/Im(\partial_2)$ の基底の導出は，つぎをすることである：

「$Im(\partial_2)$ の基底を $Ker(\partial_1)$ の基底の部分にし，そしてこれを潰す」

手順は，つぎのようになる：

1. $Ker(\partial_1)$ , $Im(\partial_2)$ の基底を求める。
   ——これは別々に求めることになる。
2. 求めたら，$Ker(\partial_1)$ の基底の各要素に対し，それが $Im(\partial_2)$ の基底の線形結合に表せるかどうかを調べる。
   この作業により，$Im(\partial_2)$ の基底が $Ker(\partial_1)$ の基底の部分になる。
3. $Ker(\partial_1)$ の基底の要素で $Im(\partial_2)$ の基底の線形結合で表せなかったものを，同値関係「$mod\ Im(\partial_2)$」で類別する。
   —— $Ker(\partial_1)$ の要素 $c_1, c_2$ は，$c_1 - c_2$ が $Im(\partial_2)$ の基底の線形結合に表せたら，同値。
4. 得られた同値類が，$Ker(\partial_1)/Im(\partial_2)$ の基底である。

$Ker(\partial_1)$ , $Im(\partial_2)$ の基底を求める方法は，

1. $\partial_1, \partial_2$ を行列に表現する。
2. その行列に対し，「行列の階数を求める計算」を施す。

$\partial_1$ の表現行列の場合は：

- 「行列の階数を求める計算」で潰れる次元が，$Ker(\partial_1)$ の次元になる。
- このときの「行列の階数を求める計算」のプロセスを追うことで，「潰れる次元」の内容になった $C_1$ の要素が求まる。
  この要素が，$Ker(\partial_1)$ の基底になる。

$\partial_2$ の表現行列の場合は：

- 「行列の階数を求める計算」で潰れなかった次元が，$Im(\partial_2)$ の次元になる。

- このときの「行列の階数を求める計算」のプロセスを追うことで，「潰れなかった次元」の内容になった $C_1$ の要素が求まる。
  この要素が，$Im(\partial_2)$ の基底になる。

「表現行列」は「始空間のこの基底と終空間のこの基底に対する表現行列」である。
$\partial_1, \partial_2$ の行列表現は，$C_0, C_1, C_2$ の基底を固定することが，最初の作業になる。
この作業は，「向きを定める」と言い表されている。

☞ トーラス：$C_1, C_2$ の基底を定める（「向きを定める」）
☞ 球面：$C_1, C_2$ の基底を定める（「向きを定める」）

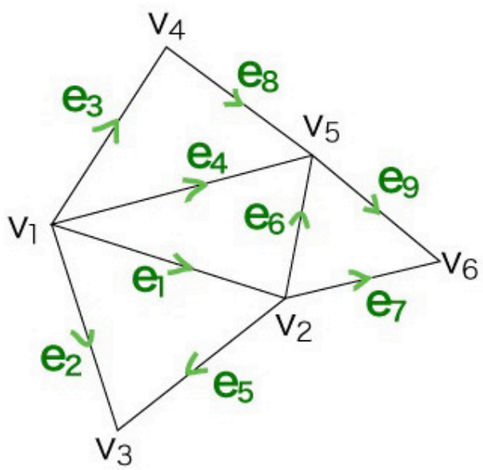
$Ker(\partial_1)$ の基底の各要素に対し，それが $Im(\partial_2)$ の基底の線形結合に表せるかどうかを調べるのは，泥臭い作業である。
$Ker(\partial_1)$ の基底の要素で $Im(\partial_2)$ の基底の線形結合で表せなかったものを，同値関係「$mod\ Im(\partial_2)$」で類別するのも，泥臭い作業である。
ともに泥臭い作業であると，観念すべし。

☞ トーラスのホモロジー加群 $H_1$ の基底

---

「向きを定める」を $C_1$ の場合で簡単に説明すると：

「一つの辺が現す二つの有向辺のうち，一方を基底の要素として固定」

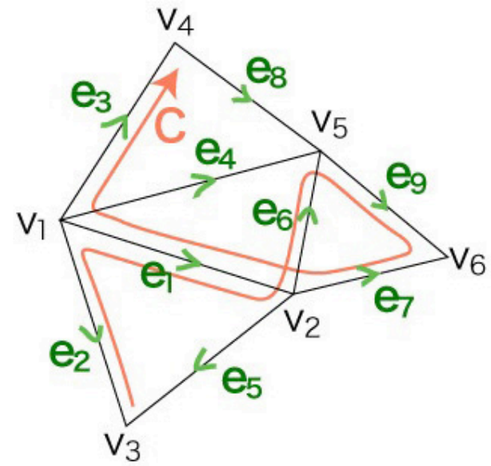



このとき，$e_i = \overrightarrow{v_j v_k}$ の逆 $\overrightarrow{v_k v_j}$ は $-e_i$ となる。

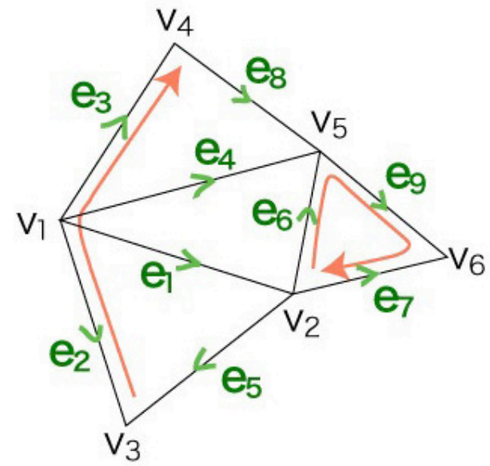




基底 $e_i$ を使ったチェインの表現の例：




$$
\begin{aligned}
c &= (-e_2) + e_1 + e_6 + e_9 + (-e_7) + (-e_1) + e_3 \\
&= ((-e_2) + e_3) + (e_1 + (-e_1)) + (e_6 + e_9 + (-e_7)) \\
&= ((-e_2) + e_3) + (e_6 + e_9 + (-e_7))
\end{aligned}
$$



## 2.　トーラスのホモロジー加群

2.1　トーラス上の周回のタイポロジー
2.2　トーラスの三角形分割
2.3　$C_1$ の基底を定める（「*辺の向きを定める*」）
2.4　$C_2$ の基底を定める（「*面の向きを定める*」）
2.5　$\partial_1$ の表現行列
2.6　$\partial_2$ の表現行列
2.7　ホモロジー加群 $H_1$ の基底

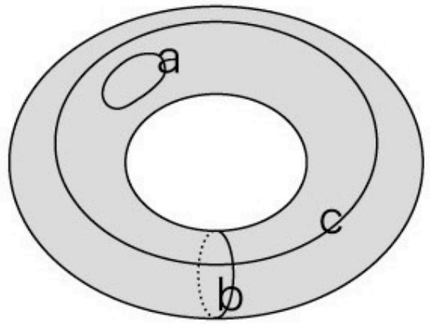




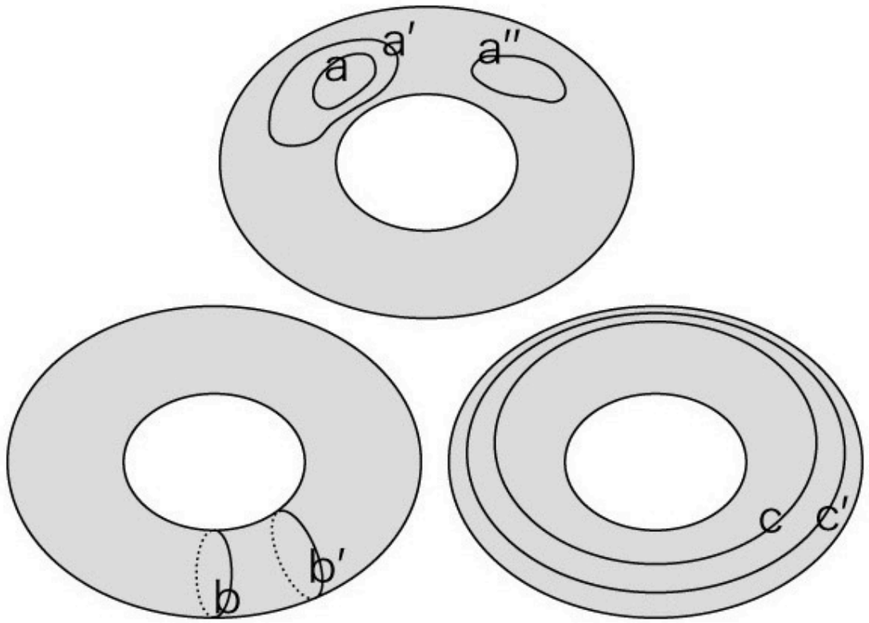
## 2.1　トーラス上の周回のタイポロジー

「閉曲面を＜周回＞のタイプで特徴づける」を，トーラスでやってみる。

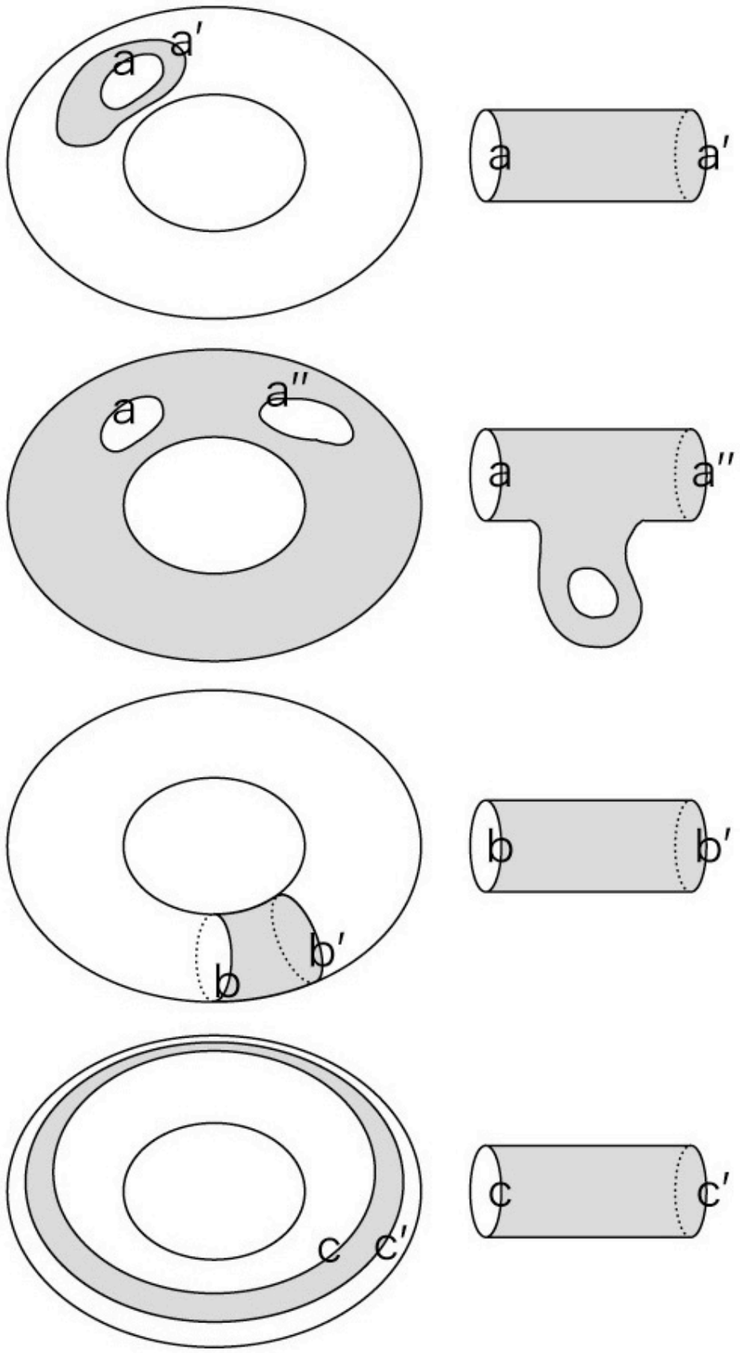
トーラス上の周回には，つぎの３タイプが見て取れる：




即ち，つぎの図で，ａとａ′とａ″，ｂとｂ′，ｃとｃ′はそれぞれ同タイプの周回の組だが，ａとｂとｃは互いにタイプが異なる，というふうに見える：



「同タイプ」には，「２つが組になって面の境界を成す」の構造が見える：



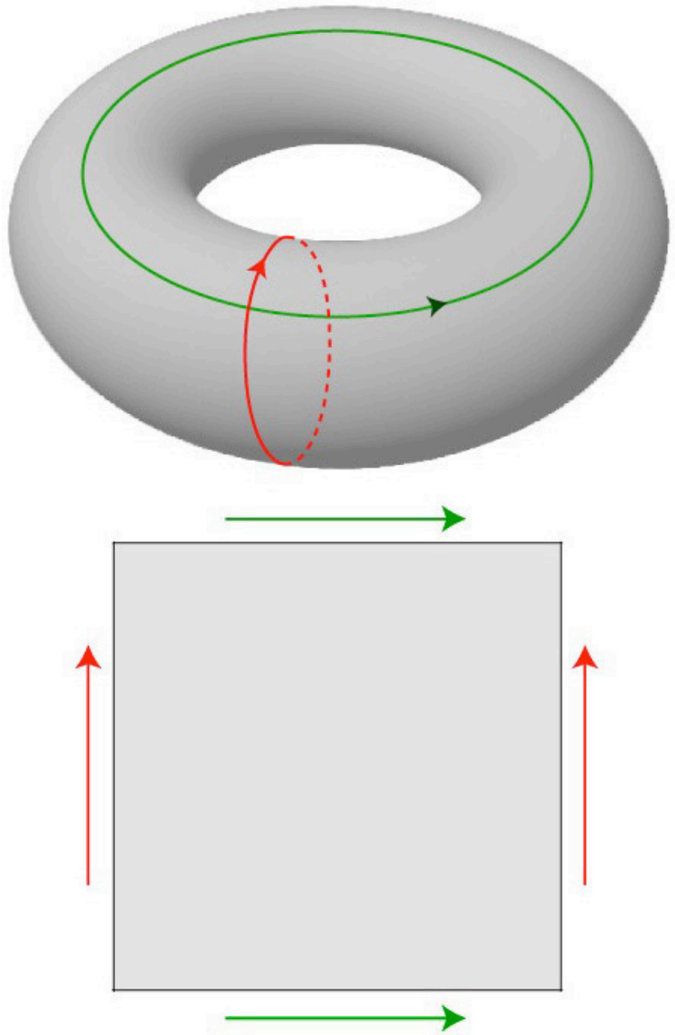

ここではトーラスのホモロジー加群の導出をやるわけであるが，以上の直観はホモロジー加群によって裏付けられることになる。





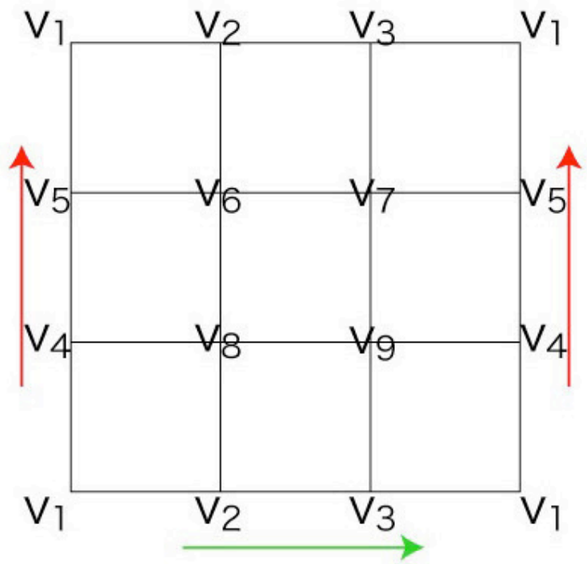
## 2.2 トーラスの三角形分割

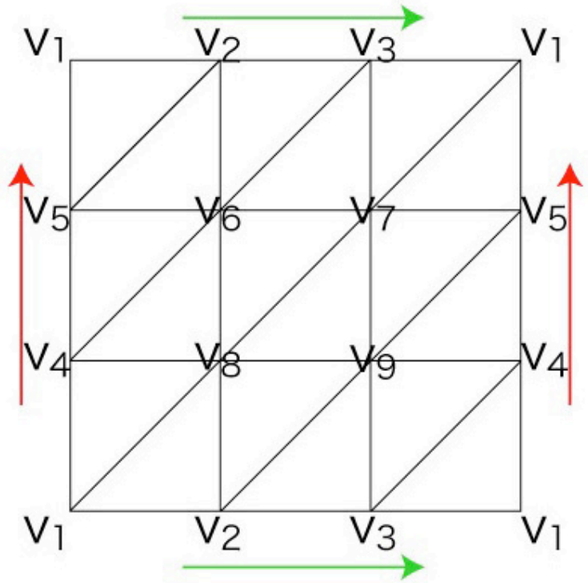
つぎは，２つの切り口によるトーラスの展開を表した図：

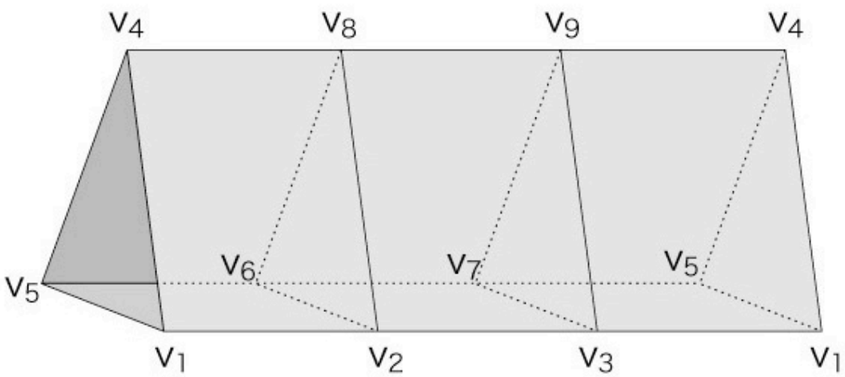


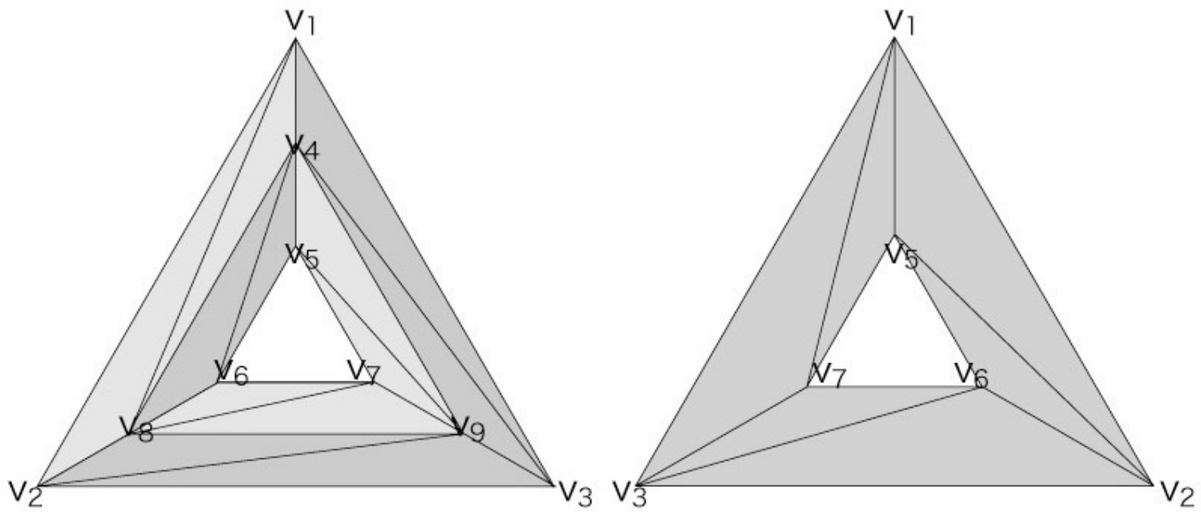
逆に，展開図からトーラスを見れば，切り口は貼り口である。

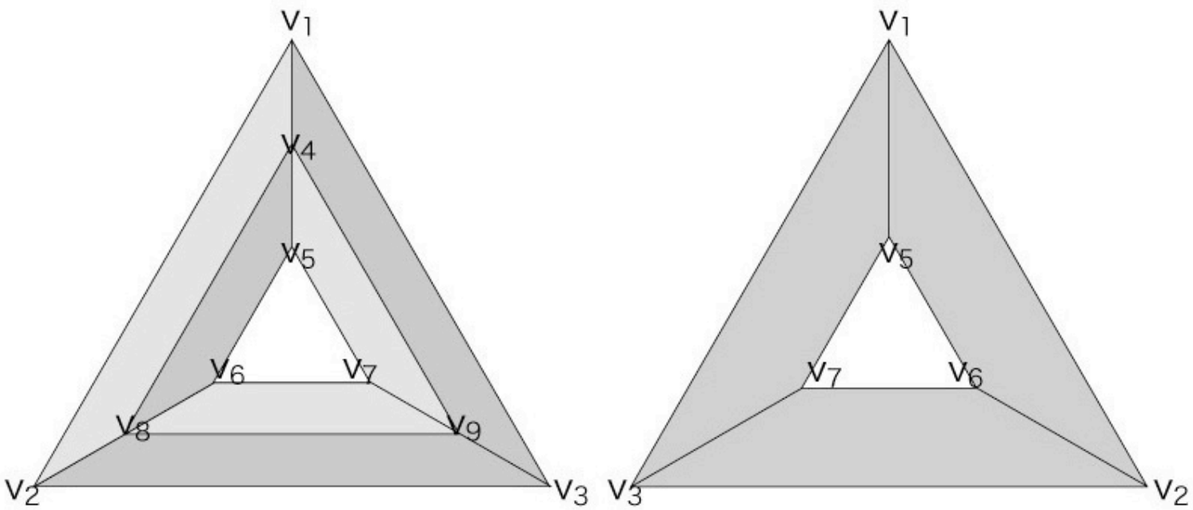
展開図をこのように捉えて，トーラスの三角形分割をつぎのようにつくる：


v1 v2 v3 v1
v5 v6 v7 v5
v4 v8 v9 v4
v1 v2 v3 v1

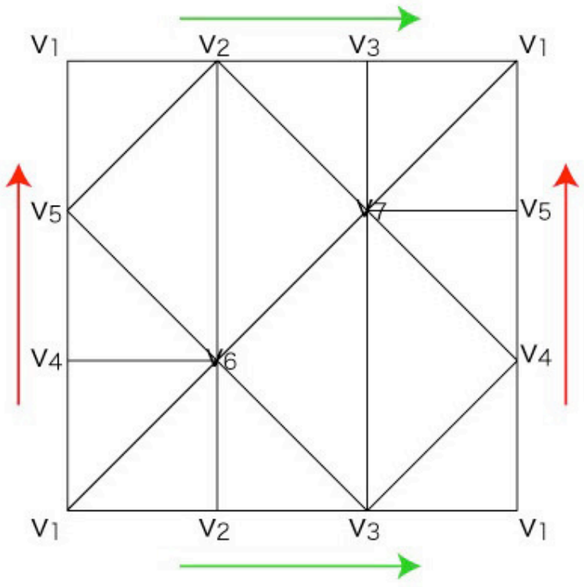

v1 v2 v3 v1
v5 v6 v7 v5
v4 v8 v9 v4
v1 v2 v3 v1


v4 v8 v9 v4
v5 v6 v7 v5
v1 v2 v3 v1


v1
v4
v5
v6 v7
v8 v9
v2 v3
v1
v5
v7 v6
v3 v2


v1
v4
v5
v6 v7
v8 v9
v2 v3
v1
v5
v7 v6
v3 v2

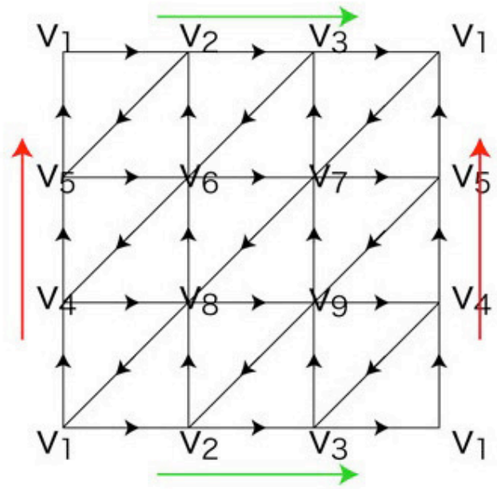
註：トーラスの三角形分割は，ここで示したものに限るのではない。
トーラスの三角形分割は，頂点数の最小が７であることがわかっているが，つぎは頂点数が７の分割：

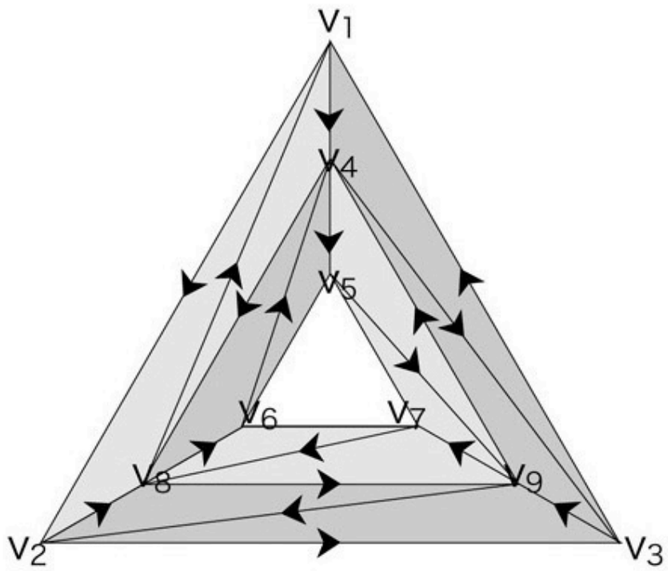


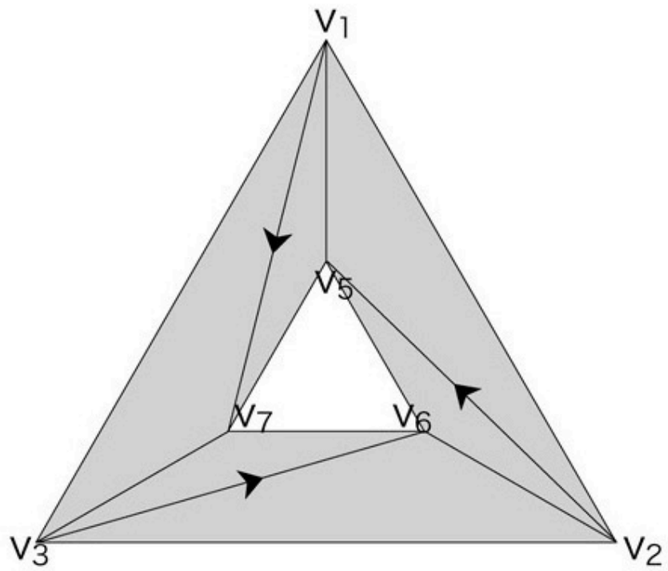


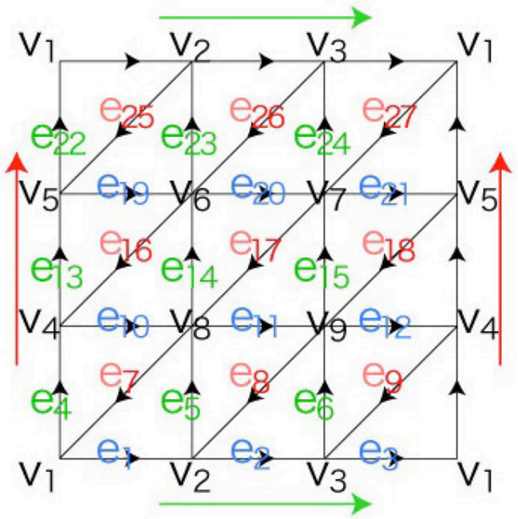

## 2.3　$C_1$ の基底を定める（「辺の向きを定める」）

バウンダリ写像を行列表現するために，先ず $C_1$ の基底を固定する。
これは，辺が現す二つの有向辺のうち，一つを基底の要素にすることである。
ここではつぎのようにする：






$$\partial_1 e_1 = v_2 - v_1 \qquad \partial_1 e_{10} = v_8 - v_4 \qquad \partial_1 e_{19} = v_6 - v_5$$
$$\partial_1 e_2 = v_3 - v_2 \qquad \partial_1 e_{11} = v_9 - v_8 \qquad \partial_1 e_{20} = v_7 - v_6$$
$$\partial_1 e_3 = v_1 - v_3 \qquad \partial_1 e_{12} = v_4 - v_9 \qquad \partial_1 e_{21} = v_5 - v_7$$

$$\partial_1 e_4 = v_4 - v_1 \qquad \partial_1 e_{13} = v_5 - v_4 \qquad \partial_1 e_{22} = v_1 - v_5$$
$$\partial_1 e_5 = v_8 - v_2 \qquad \partial_1 e_{14} = v_6 - v_8 \qquad \partial_1 e_{23} = v_2 - v_6$$
$$\partial_1 e_6 = v_9 - v_3 \qquad \partial_1 e_{15} = v_7 - v_9 \qquad \partial_1 e_{24} = v_3 - v_7$$

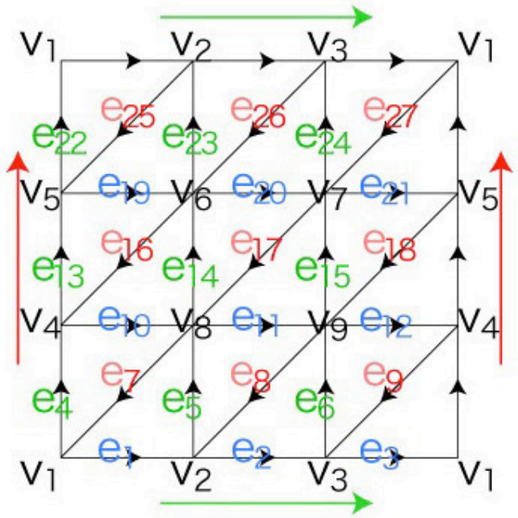
$$\partial_1 e_7 = v_1 - v_8 \qquad \partial_1 e_{16} = v_4 - v_6 \qquad \partial_1 e_{25} = v_5 - v_2$$
$$\partial_1 e_8 = v_2 - v_9 \qquad \partial_1 e_{17} = v_8 - v_7 \qquad \partial_1 e_{26} = v_6 - v_3$$
$$\partial_1 e_9 = v_3 - v_4 \qquad \partial_1 e_{18} = v_9 - v_5 \qquad \partial_1 e_{27} = v_7 - v_1]$$





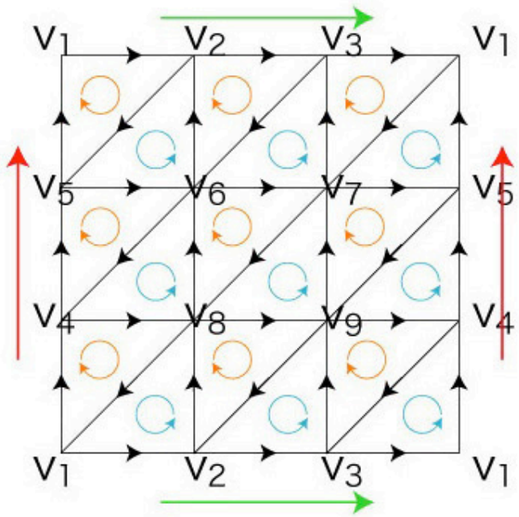
## 2.4 $C_2$ の基底を定める（「面の向きを定める」）

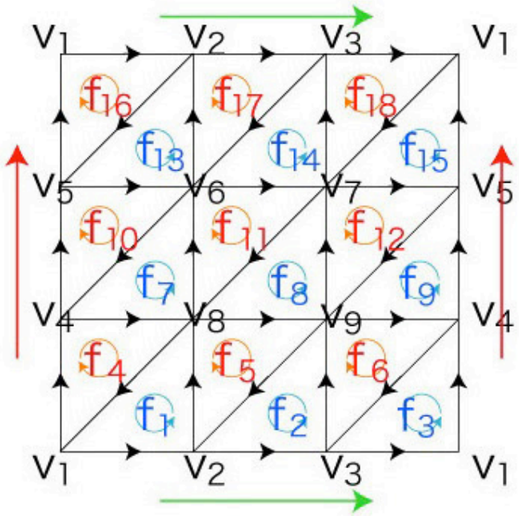
バウンダリ写像を行列表現するために，$C_1, C_2$ の基底を固定する。
$C_1$ は済ませた：




つぎは，$C_2$ である。

ここではつぎのようにする：





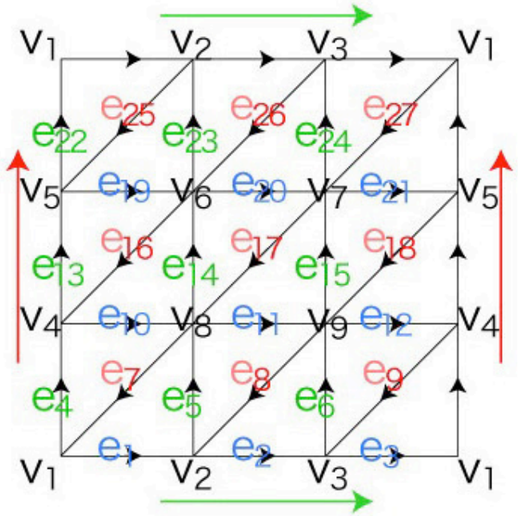

$$
\begin{aligned}
\partial_2 f_1 &= e_1 + e_5 + e_7 \\
\partial_2 f_2 &= e_2 + e_6 + e_8 \\
\partial_2 f_3 &= e_3 + e_4 + e_9 \\
\partial_2 f_4 &= e_4 + e_{10} + e_7 \\
\partial_2 f_5 &= e_5 + e_{11} + e_8 \\
\partial_2 f_6 &= e_6 + e_{12} + e_9 \\
\partial_2 f_7 &= e_{10} + e_{14} + e_{16} \\
\partial_2 f_8 &= e_{11} + e_{15} + e_{17} \\
\partial_2 f_9 &= e_{12} + e_{13} + e_{18} \\
\partial_2 f_{10} &= e_{13} + e_{19} + e_{16} \\
\partial_2 f_{11} &= e_{14} + e_{20} + e_{17} \\
\partial_2 f_{12} &= e_{15} + e_{21} + e_{18} \\
\partial_2 f_{13} &= e_{19} + e_{23} + e_{25} \\
\partial_2 f_{14} &= e_{20} + e_{24} + e_{26} \\
\partial_2 f_{15} &= e_{21} + e_{22} + e_{27} \\
\partial_2 f_{16} &= e_{22} + e_1 + e_{25} \\
\partial_2 f_{17} &= e_{23} + e_2 + e_{26} \\
\partial_2 f_{18} &= e_{24} + e_3 + e_{27}
\end{aligned}
$$





## 2.5 $\partial_1$ の表現行列

$C_1$ の基底を，つぎのように定めた：




$C_0$ の基底は，$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$ をとる。

各 $e_i$ のバウンダリは，

$$
\begin{array}{lll}
\partial_1 e_1 = v_2 - v_1 & \partial_1 e_{10} = v_8 - v_4 & \partial_1 e_{19} = v_6 - v_5 \\
\partial_1 e_2 = v_3 - v_2 & \partial_1 e_{11} = v_9 - v_8 & \partial_1 e_{20} = v_7 - v_6 \\
\partial_1 e_3 = v_1 - v_3 & \partial_1 e_{12} = v_4 - v_9 & \partial_1 e_{21} = v_5 - v_7 \\
 & & \\
\partial_1 e_4 = v_4 - v_1 & \partial_1 e_{13} = v_5 - v_4 & \partial_1 e_{22} = v_1 - v_5 \\
\partial_1 e_5 = v_8 - v_2 & \partial_1 e_{14} = v_6 - v_8 & \partial_1 e_{23} = v_2 - v_6 \\
\partial_1 e_6 = v_9 - v_3 & \partial_1 e_{15} = v_7 - v_9 & \partial_1 e_{24} = v_3 - v_7 \\
 & & \\
\partial_1 e_7 = v_1 - v_8 & \partial_1 e_{16} = v_4 - v_6 & \partial_1 e_{25} = v_5 - v_2 \\
\partial_1 e_8 = v_2 - v_9 & \partial_1 e_{17} = v_8 - v_7 & \partial_1 e_{26} = v_6 - v_3 \\
\partial_1 e_9 = v_3 - v_4 & \partial_1 e_{18} = v_9 - v_5 & \partial_1 e_{27} = v_7 - v_1]
\end{array}
$$

よって，基底 $\{e_i\}, \{v_j\}$ に対する $\partial_1 : C_1 \to C_0$ の表現行列は，

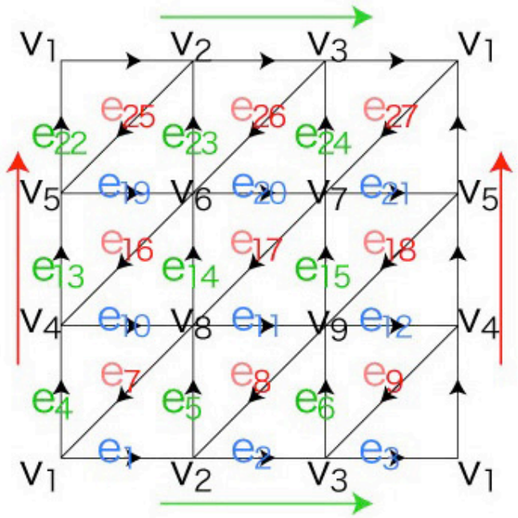
$$
\begin{array}{c|ccccccccc}
 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 \\
\hline
e_1 & -1 & 1 & & & & & & & \\
e_2 & & -1 & 1 & & & & & & \\
e_3 & 1 & & -1 & & & & & & \\
e_4 & -1 & & & 1 & & & & & \\
e_5 & & -1 & & & & & & 1 & \\
\cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
e_6 & & & -1 & & & & & & 1 \\
e_7 & 1 & & & & & & & -1 & \\
e_8 & & 1 & & & & & & & -1 \\
e_9 & & & 1 & -1 & & & & & \\
e_{10} & & & & -1 & & & & 1 & \\
\cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
e_{11} & & & & & & & & -1 & 1 \\
e_{12} & & & & 1 & & & & & -1 \\
e_{13} & & & & -1 & 1 & & & & \\
e_{14} & & & & & & 1 & & -1 & \\
e_{15} & & & & & & & 1 & & -1 \\
\cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
e_{16} & & & & 1 & & -1 & & & \\
e_{17} & & & & & & & -1 & 1 & \\
e_{18} & & & & & -1 & & & & 1 \\
e_{19} & & & & & -1 & 1 & & & \\
e_{20} & & & & & & -1 & 1 & & \\
\cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
e_{21} & & & & & 1 & & -1 & & \\
e_{22} & 1 & & & & -1 & & & & \\
e_{23} & & 1 & & & & -1 & & & \\
e_{24} & & & 1 & & & & -1 & & \\
e_{25} & & -1 & & & 1 & & & & \\
\cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
e_{26} & & & -1 & & & 1 & & & \\
e_{27} & -1 & & & & & & 1 & &
\end{array}
$$





以下，基底 $\{e_i\}$ の変換によってこの行列の階数を減らす作業をする。

行列の操作において考えることは，どの $e_i$ を変更せずに残すかである。




図に見て取れるように，各有向辺のバウンダリ (両端の頂点) は，つぎの 8 個の有向辺がつくるチェインのバウンダリに表現できる：

$$e_1, e_2, e_4, e_5, e_6, e_{13}, e_{14}, e_{15}$$

これらを，「変更せずに残す $e_i$ 」とする。

$$
\begin{aligned}
e'_8 &= e_8 + e_6 \\
e'_{11} &= e_{11} - e_6 \\
e'_{12} &= e_{12} + e_6 \\
e'_{18} &= e_{18} - e_6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e'_7 &= e_7 + e_5 \\
e'_{10} &= e_{10} - e_5 \\
e''_{11} &= e'_{11} + e_5 \\
e'_{17} &= e_{17} - e_5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{c}
 \\ e_1 \\ e_2 \\ e'_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ \cdots \\ e_6 \\ e''_7 \\ e''_8 \\ e''_9 \\ e'''_{10} \\ \cdots \\ e'''_{11} \\ e'''_{12} \\ e_{13} \\ e_{14} \\ e_{15} \\ \cdots \\ e'''_{16} \\ e'''_{17} \\ e'''_{18} \\ e'''_{19} \\ e'''_{20} \\ \cdots \\ e''_{21} \\ e'_{22}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 \end{array} \\
\left|\begin{array}{ccccccccc}
-1 & 1 & & & & & & & \\
 & -1 & 1 & & & & & & \\
1 & & -1 & & & & & & \\
-1 & & & 1 & & & & & \\
 & -1 & & & & & & 1 & \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & -1 & & & & & & 1 \\
1 & -1 & & & & & & & \\
 & 1 & -1 & & & & & & \\
 & & 1 & -1 & & & & & \\
 & 1 & & -1 & & & & & \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & -1 & 1 & & & & & & \\
 & & -1 & 1 & & & & & \\
 & & & -1 & 1 & & & & \\
 & & & & & 1 & & -1 & \\
 & & & & & & 1 & & -1 \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & 1 & & -1 & & & \\
 & 1 & & & & & -1 & & \\
 & & 1 & & -1 & & & & \\
 & & & & -1 & 1 & & & \\
 & & & & & -1 & 1 & & \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & & 1 & & -1 & & \\
1 & & & & -1 & & & &
\end{array}\right|
\end{array}
$$





$$
\begin{array}{c}
e''_{23} \\ e''_{24} \\ e''_{25} \\ \cdots \\ e'_{26} \\ e'_{27}
\end{array}
\left|\begin{array}{ccccccccc}
 & 1 & & & & -1 & & & \\
 & & 1 & & & & -1 & & \\
 & -1 & & & 1 & & & & \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & -1 & & & 1 & & & \\
-1 & & & & & & 1 & &
\end{array}\right|
$$

$$
\begin{aligned}
e''_{17} &= e'_{17} + e_{27} \\
e'_{20} &= e_{20} - e_{27} \\
e'_{21} &= e_{21} + e_{27} \\
e'_{24} &= e_{24} + e_{27}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e'_{16} &= e_{16} + e_{26} \\
e'_{19} &= e_{19} - e_{26} \\
e''_{20} &= e'_{20} + e_{26} \\
e'_{23} &= e_{23} + e_{26}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{c}
 \\ e_1 \\ e_2 \\ e'_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ \cdots \\ e_6 \\ e''_7 \\ e''_8 \\ e''_9 \\ e'''_{10} \\ \cdots \\ e'''_{11} \\ e'''_{12} \\ e_{13} \\ e_{14}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 \end{array} \\
\left|\begin{array}{ccccccccc}
-1 & 1 & & & & & & & \\
 & -1 & 1 & & & & & & \\
1 & & -1 & & & & & & \\
-1 & & & 1 & & & & & \\
 & -1 & & & & & & 1 & \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & -1 & & & & & & 1 \\
1 & -1 & & & & & & & \\
 & 1 & -1 & & & & & & \\
 & & 1 & -1 & & & & & \\
 & 1 & & -1 & & & & & \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & -1 & 1 & & & & & & \\
 & & -1 & 1 & & & & & \\
 & & & -1 & 1 & & & & \\
 & & & & & 1 & & -1 & \\
 & & & & & & 1 & &
\end{array}\right|
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|ccccccccc|}
e_{15} & & & & & & & 1 & & -1 \\
\cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
e'''_{16} & & & -1 & 1 & & & & & \\
e'''_{17} & -1 & 1 & & & & & & & \\
e'''_{18} & & & 1 & & -1 & & & & \\
e'''_{19} & & & 1 & & -1 & & & & \\
e'''_{20} & 1 & & -1 & & & & & & \\
\cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
e''_{21} & -1 & & & & 1 & & & & \\
e'_{22} & 1 & & & & -1 & & & & \\
e''_{23} & & 1 & -1 & & & & & & \\
e''_{24} & -1 & & 1 & & & & & & \\
e''_{25} & & -1 & & & 1 & & & & \\
\cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
e'_{26} & & & -1 & & & 1 & & & \\
e'_{27} & -1 & & & & & & 1 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
e''_{18} &= e'_{18} - e_{22} \\
e'_{19} &= e_{19} - e_{22} \\
e'_{21} &= e_{21} + e_{22} \\
e'_{25} &= e_{25} + e_{22}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e'_{9} &= e_{9} + e_{4} \\
e''_{10} &= e'_{10} + e_{4} \\
e''_{12} &= e'_{12} - e_{4} \\
e'_{16} &= e_{16} - e_{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{c}
\\ e_1 \\ e_2 \\ e'_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ \cdots
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
-1 & 1 & & & & & & & \\
 & -1 & 1 & & & & & & \\
1 & & -1 & & & & & & \\
-1 & & & 1 & & & & & \\
 & -1 & & & & & & 1 & \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{pmatrix}
\end{array}
$$





$$
\begin{array}{c|ccccccccc|}
e_{6} & & & -1 & & & & & & 1 \\
e''_{7} & 1 & -1 & & & & & & & \\
e''_{8} & & 1 & -1 & & & & & & \\
e''_{9} & -1 & & 1 & & & & & & \\
e'''_{10} & -1 & 1 & & & & & & & \\
\cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
e'''_{11} & & -1 & 1 & & & & & & \\
e'''_{12} & 1 & & -1 & & & & & & \\
e_{13} & & & & -1 & 1 & & & & \\
e_{14} & & & & & & 1 & & -1 & \\
e_{15} & & & & & & & 1 & & -1 \\
\cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
e'''_{16} & 1 & & -1 & & & & & & \\
e'''_{17} & -1 & 1 & & & & & & & \\
e'''_{18} & -1 & & 1 & & & & & & \\
e'''_{19} & -1 & & 1 & & & & & & \\
e'''_{20} & 1 & & -1 & & & & & & \\
\cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
e''_{21} & & & & & & & & & \\
e'_{22} & 1 & & & & -1 & & & & \\
e''_{23} & & 1 & -1 & & & & & & \\
e''_{24} & -1 & & 1 & & & & & & \\
e''_{25} & 1 & -1 & & & & & & & \\
\cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
e'_{26} & & & -1 & & & 1 & & & \\
e'_{27} & -1 & & & & & & 1 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
e''_7 &= e'_7 + e_1 \\
e'''_{10} &= e''_{10} - e_1 \\
e'''_{17} &= e''_{17} - e_1 \\
e''_{25} &= e'_{25} + e_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e''_8 &= e'_8 + e_2 \\
e'''_{11} &= e''_{11} - e_2 \\
e''_{23} &= e'_{23} + e_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e''_9 &= e'_9 + e_3 \\
e'''_{12} &= e''_{12} - e_3 \\
e'''_{16} &= e''_{16} - e_3 \\
e'''_{18} &= e''_{18} + e_3 \\
e'''_{19} &= e''_{19} + e_3 \\
e'''_{20} &= e''_{20} - e_3 \\
e''_{24} &= e'_{24} + e_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{c}
 \\
e_1 \\
e_2 \\
e'_3 \\
e_4 \\
e_5 \\
\cdots \\
e_6 \\
e''_7 \\
e''_8 \\
e''_9 \\
e'''_{10} \\
\cdots \\
e'''_{11} \\
e'''_{12} \\
e_{13} \\
e_{14} \\
e_{15} \\
\cdots \\
e'''_{16}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 \end{array} \\
\left|\begin{array}{ccccccccc}
-1 & 1 & & & & & & & \\
 & -1 & 1 & & & & & & \\
1 & & -1 & & & & & & \\
-1 & & & 1 & & & & & \\
 & -1 & & & & & & 1 & \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & -1 & & & & & & 1 \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \\
 & & & -1 & 1 & & & & \\
 & & & & & 1 & & -1 & \\
 & & & & & & 1 & & -1 \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & & & & & &
\end{array}\right|
\end{array}
$$





$$
\begin{array}{c}
e'''_{17} \\
e'''_{18} \\
e'''_{19} \\
e'''_{20} \\
\cdots \\
e''_{21} \\
e'_{22} \\
e''_{23} \\
e''_{24} \\
e''_{25} \\
\cdots \\
e'_{26} \\
e'_{27}
\end{array}
\left|\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & & & & & & \\
1 & & & & -1 & & & & \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & -1 & & & 1 & & & \\
-1 & & & & & & 1 & &
\end{array}\right|
$$

$$
\begin{aligned}
e'_3 &= e_3 + (e_1 + e_2) \\
e'_{22} &= e_{22} + (e_4 + e_{13}) \\
e'_{26} &= e_{26} + (e_2 - e_5 - e_{14}) \\
e'_{27} &= e_{27} - (e_1 + e_2 + e_6 + e_{15})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{c}
 \\
e_1 \\
e_2 \\
e'_3 \\
e_4 \\
e_5 \\
\cdots \\
e_6 \\
e''_7 \\
e''_8 \\
e''_9 \\
e'''_{10} \\
\cdots \\
e'''_{11}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 \end{array} \\
\left|\begin{array}{ccccccccc}
-1 & 1 & & & & & & & \\
 & -1 & 1 & & & & & & \\
 & & & & & & & & \\
-1 & & & 1 & & & & & \\
 & -1 & & & & & & 1 & \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & -1 & & & & & & 1 \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & & & & & &
\end{array}\right|
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|cccccccc|}
e'''_{12} & & & & & & & & \\
e_{13} & & & -1 & 1 & & & & \\
e_{14} & & & & & 1 & & -1 & \\
e_{15} & & & & & & 1 & & -1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
e'''_{16} & & & & & & & & \\
e'''_{17} & & & & & & & & \\
e'''_{18} & & & & & & & & \\
e'''_{19} & & & & & & & & \\
e'''_{20} & & & & & & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
e''_{21} & & & & & & & & \\
e'_{22} & & & & & & & & \\
e''_{23} & & & & & & & & \\
e''_{24} & & & & & & & & \\
e''_{25} & & & & & & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
e'_{26} & & & & & & & & \\
e'_{27} & & & & & & & &
\end{array}
$$

この行列は，つぎのことを示している：

- 写像 $\partial_1$ では，27次元が８次元になり，19次元が潰れる。
  即ち，$Ker(\partial_1)$ が 19次元，$Ker(\partial_1)$ の補空間が ８次元。

実際，つぎのチェインが，補空間の基底を成す：

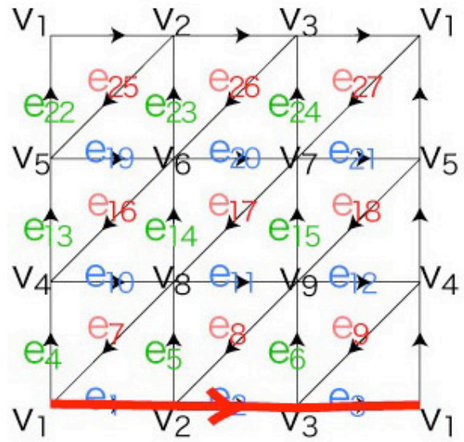
$e_1$，$e_2$，$e_4$，$e_5$，$e_6$，$e_{13}$，$e_{14}$，$e_{15}$，



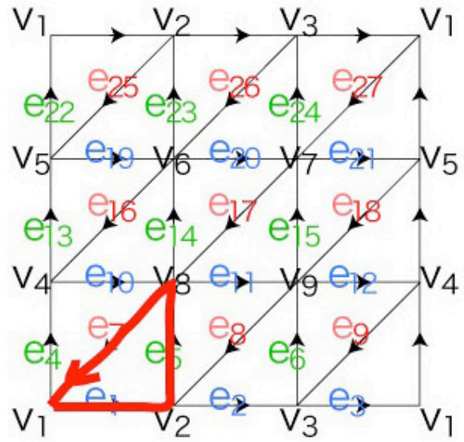


そして，つぎのサイクルが，$Ker(\partial_1)$ の基底を成す：

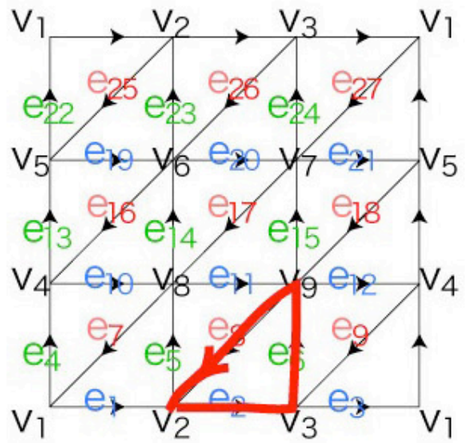
$$e'_3 = e_3 + (e_1 + e_2) = e_1 + e_2 + e_3$$



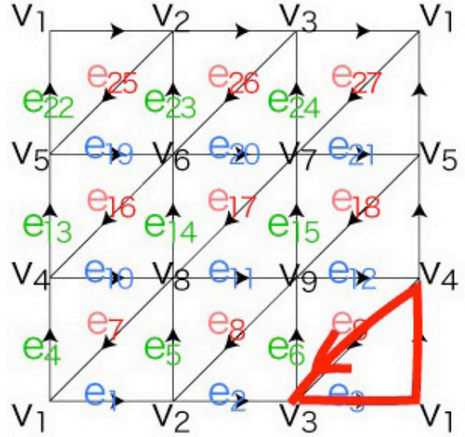

$$e''_7 = e'_7 + e_1 = (e_7 + e_5) + e_1 = e_1 + e_5 + e_7$$



$$e''_8 = e'_8 + e_2 = (e_8 + e_6) + e_2 = e_2 + e_6 + e_8$$



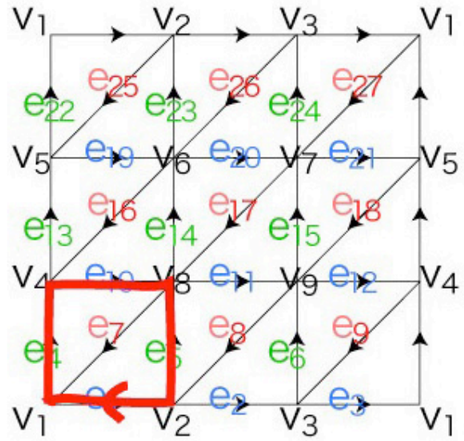

$$e''_9 = e'_9 + e_3 = (e_9 + e_4) + e_3 = e_3 + e_4 + e_9$$



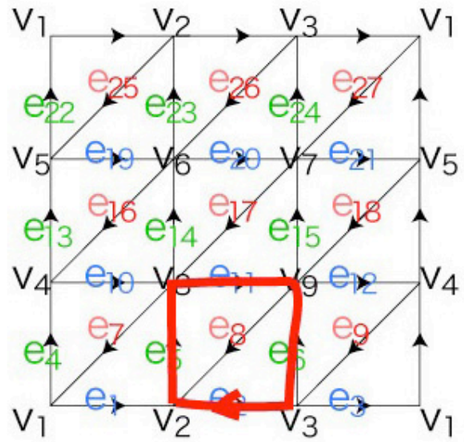




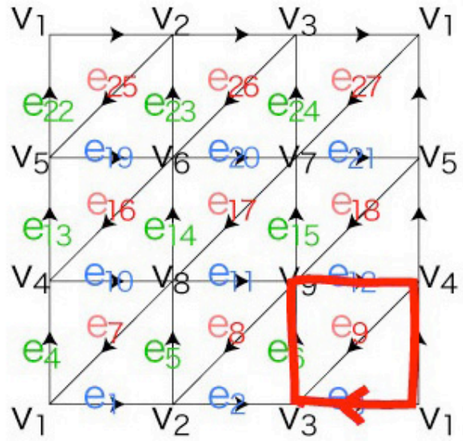

$$e'''_{10} = e''_{10} - e_1 = (e'_{10} + e_4) - e_1 = ((e_{10} - e_5) + e_4) - e_1$$
$$= e_4 + e_{10} - e_5 - e_1$$



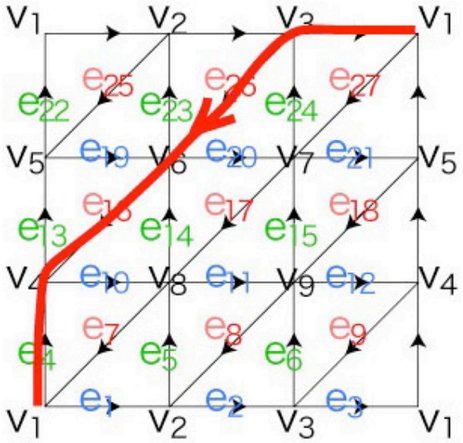

$$e'''_{11} = e''_{11} - e_2 = (e'_{11} + e_5) - e_2 = ((e_{11} - e_6) + e_5) - e_2$$
$$= e_5 + e_{11} - e_6 - e_2$$



$$e'''_{12} = e''_{12} - e_3 = (e'_{12} - e_4) - e_3 = ((e_{12} + e_6) - e_4) - e_3$$
$$= e_6 + e_{12} - e_4 - e_3$$

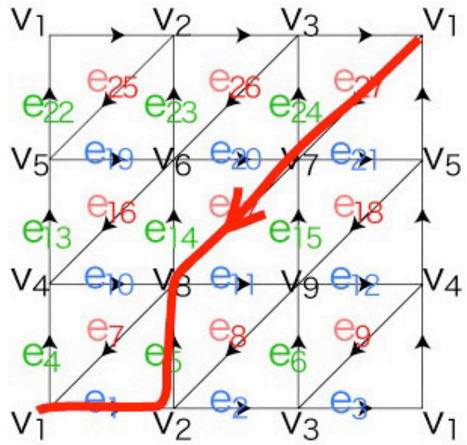



$$e'''_{16} = e''_{16} - e_3 = (e'_{16} - e_4) - e_3 = ((e_{16} + e_{26}) - e_4) - e_3$$
$$= -e_3 + e_{26} + e_{16} - e_4$$

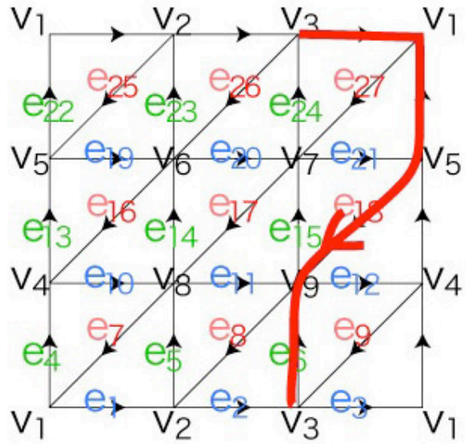




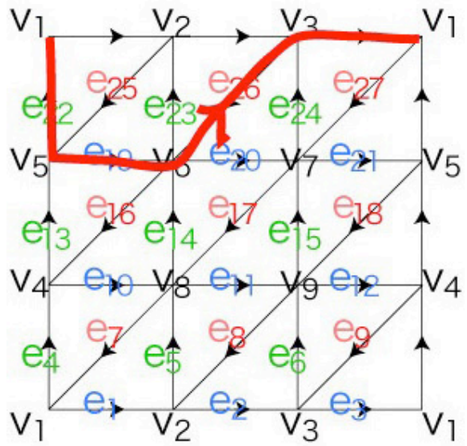

$$e'''_{17} = e''_{17} - e_1 = (e'_{17} + e_{27}) - e_1 = ((e_{17} - e_5) + e_{27} - e_1$$
$$= e_{27} + e_{17} - e_5 - e_1$$



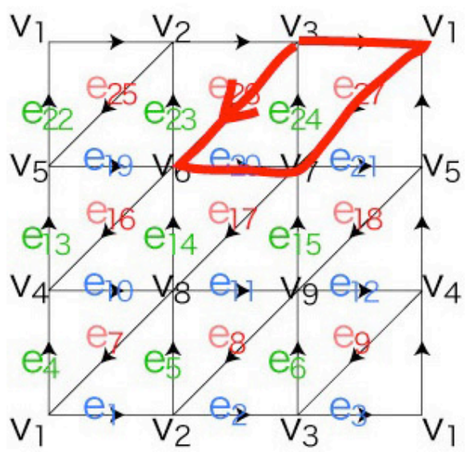

$$e'''_{18} = e''_{18} + e_3 = (e'_{18} - e_{22}) + e_3 = ((e_{18} - e_6) - e_{22}) + e_3$$
$$= e_3 - e_{22} + e_{18} - e_6$$



$$e'''_{19} = e''_{19} + e_3 = (e'_{19} - e_{22}) + e_3 = ((e_{19} - e_{26}) - e_{22}) + e_3$$
$$= -e_{22} + e_{19} - e_{26} + e_3$$



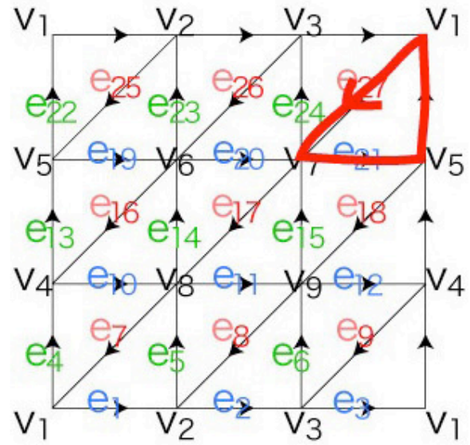

$$e'''_{20} = e''_{20} - e_3 = (e'_{20} + e_{26}) - e_3 = ((e_{20} - e_{27}) + e_{26}) - e_3$$
$$= e_{26} + e_{20} - e_{27} - e_3$$



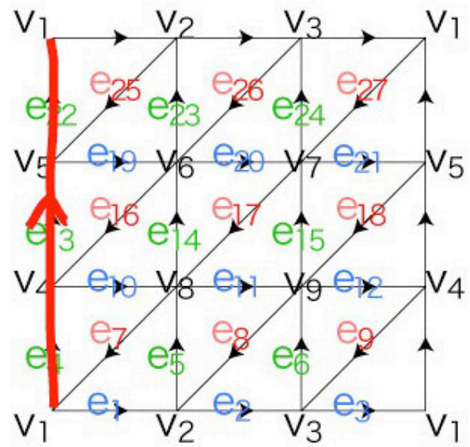




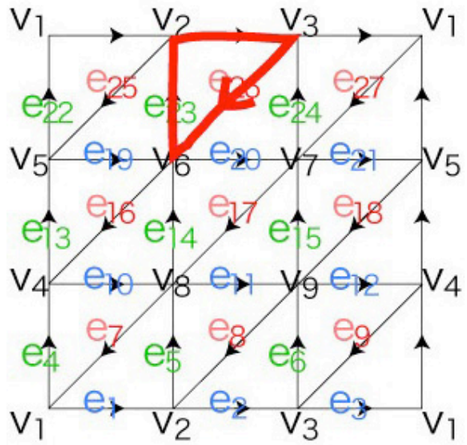

$$e''_{21} = e'_{21} + e_{22} = (e_{21} + e_{27}) + e_{22} = e_{27} + e_{21} + e_{22}$$



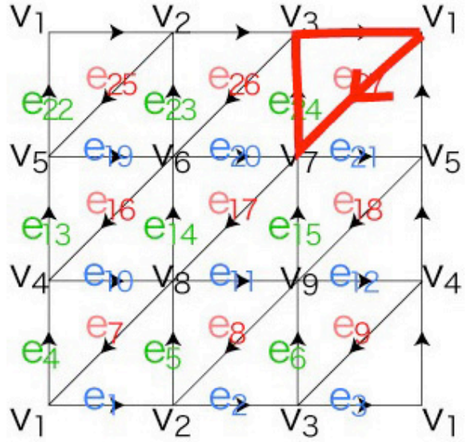

$$e'_{22} = e_{22} + (e_4 + e_{13}) = e_4 + e_{13} + e_{22}$$



$$e''_{23} = e'_{23} + e_{26} = (e_{23} + e_2) + e_{26} = e_{23} + e_{26} + e_2$$

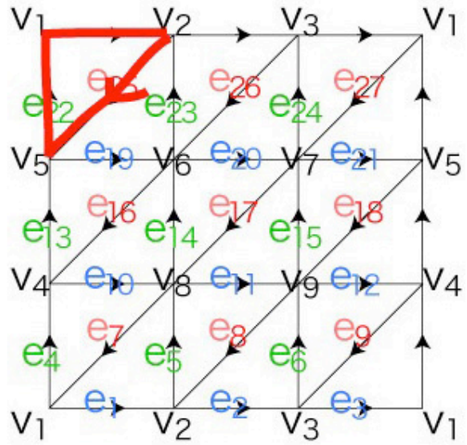



$$e''_{24} = e'_{24} + e_3 = (e_{24} + e_{27}) + e_3 = e_{27} + e_{24} + e_3$$

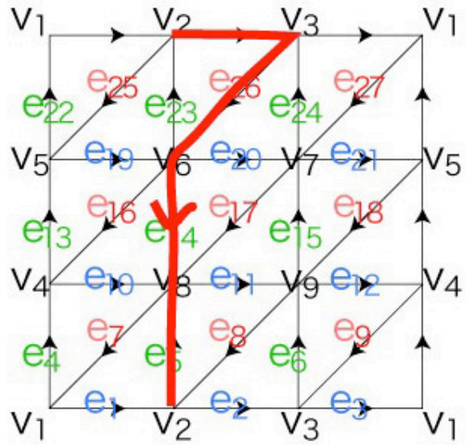




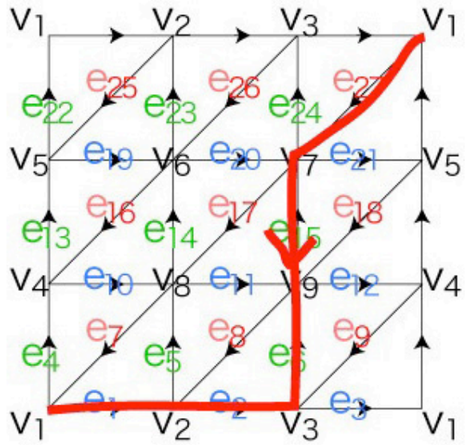

$$e''_{25} = e'_{25} + e_1 = (e_{25} + e_{22}) + e_1 = e_{25} + e_{22} + e_1$$




$$e'_{26} = e_{26} + (e_2 - e_5 - e_{14}) = e_{26} - e_{14} - e_5 + e_2$$



$$e'_{27} = e_{27} - (e_1 + e_2 + e_6 + e_{15}) = e_{27} - e_{15} - e_6 - e_2 - e_1$$

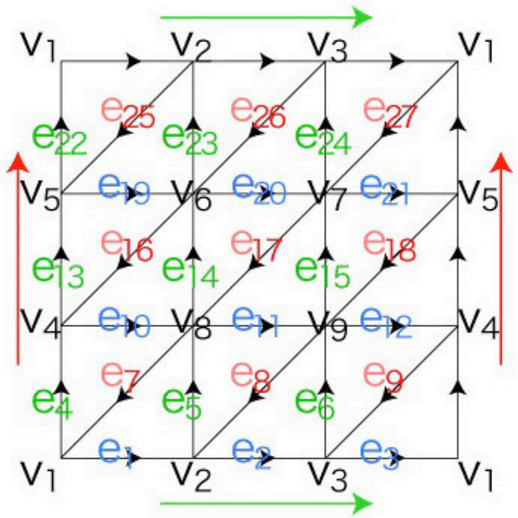


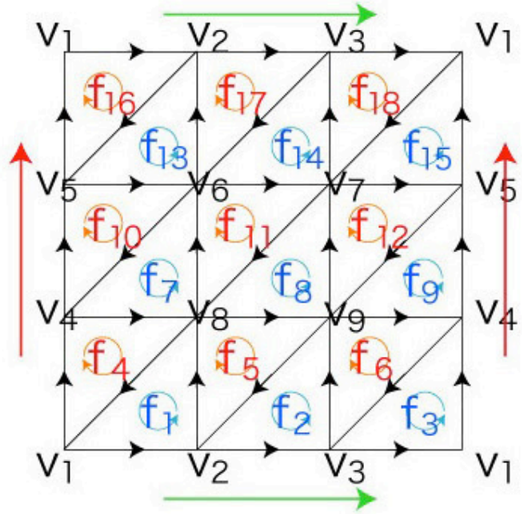





## 2.6 $\partial_2$ の表現行列

$C_1, C_2$ の基底を，つぎのように定めた：



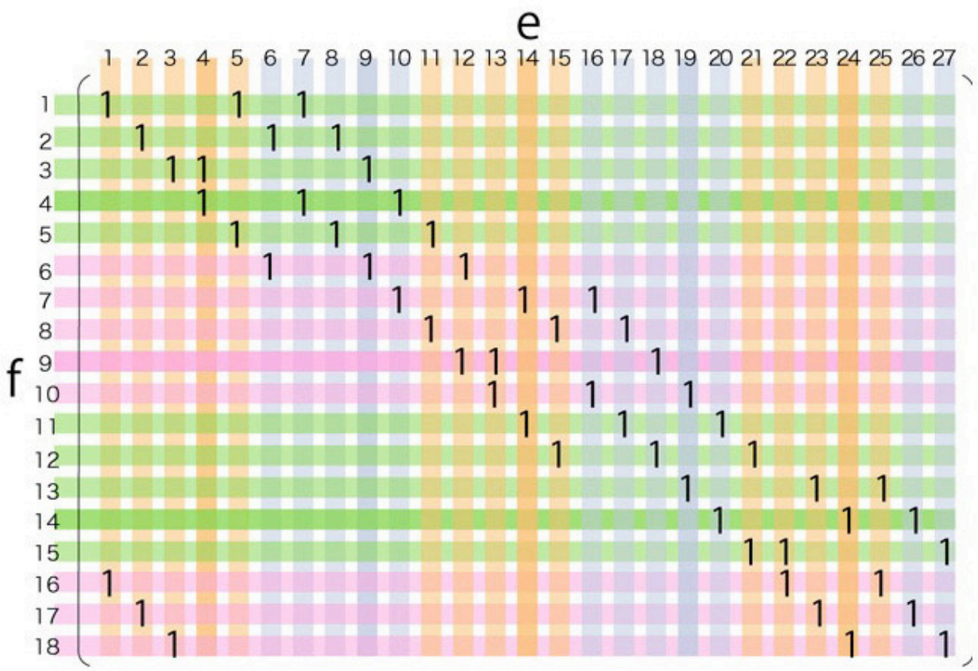




各 $f_k$ のバウンダリは，

$$\begin{aligned}
\partial_2 f_1 &= e_1 + e_5 + e_7 \\
\partial_2 f_2 &= e_2 + e_6 + e_8 \\
\partial_2 f_3 &= e_3 + e_4 + e_9 \\
\partial_2 f_4 &= e_4 + e_{10} + e_7 \\
\partial_2 f_5 &= e_5 + e_{11} + e_8
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\partial_2 f_6 &= e_6 + e_{12} + e_9 \\
\partial_2 f_7 &= e_{10} + e_{14} + e_{16} \\
\partial_2 f_8 &= e_{11} + e_{15} + e_{17} \\
\partial_2 f_9 &= e_{12} + e_{13} + e_{18} \\
\partial_2 f_{10} &= e_{13} + e_{19} + e_{16} \\
\partial_2 f_{11} &= e_{14} + e_{20} + e_{17} \\
\partial_2 f_{12} &= e_{15} + e_{21} + e_{18} \\
\partial_2 f_{13} &= e_{19} + e_{23} + e_{25} \\
\partial_2 f_{14} &= e_{20} + e_{24} + e_{26} \\
\partial_2 f_{15} &= e_{21} + e_{22} + e_{27} \\
\partial_2 f_{16} &= e_{22} + e_1 + e_{25} \\
\partial_2 f_{17} &= e_{23} + e_2 + e_{26} \\
\partial_2 f_{18} &= e_{24} + e_3 + e_{27}
\end{aligned}
$$

よって，基底 $\{f_k\}, \{e_i\}$ に対する $\partial_2 : C_2 \to C_1$ の表現行列は，

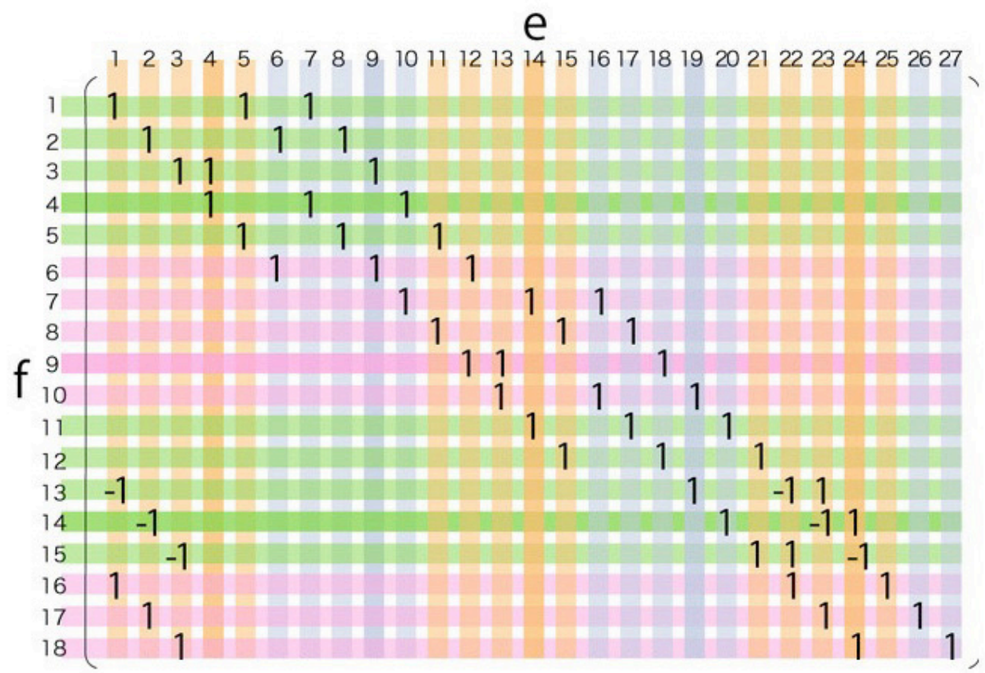



$\partial_2$ によって潰れる次元は，ほとんど無いように見える。

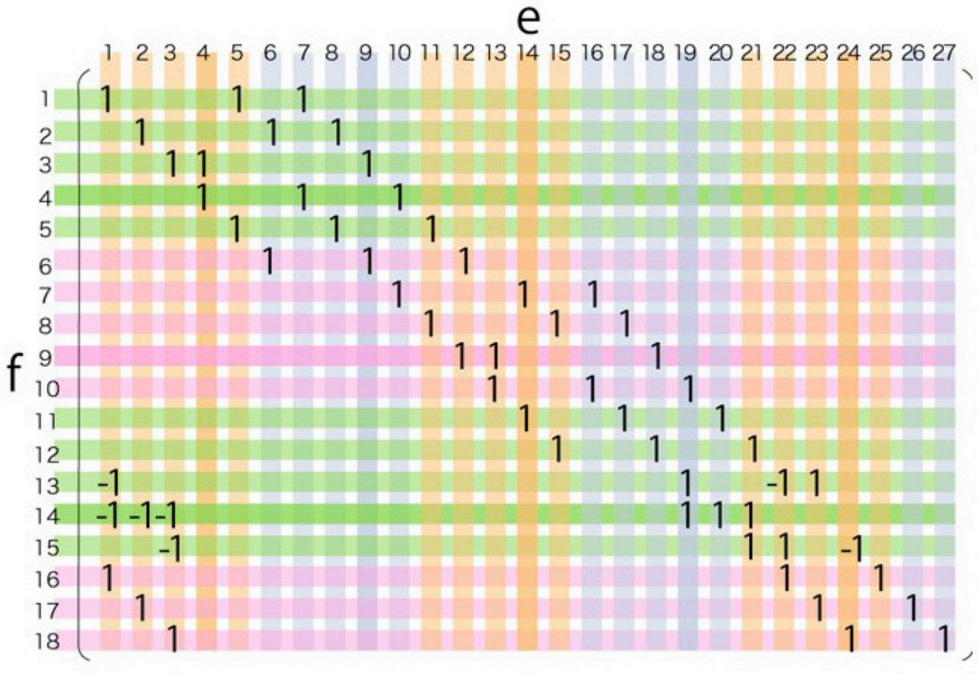




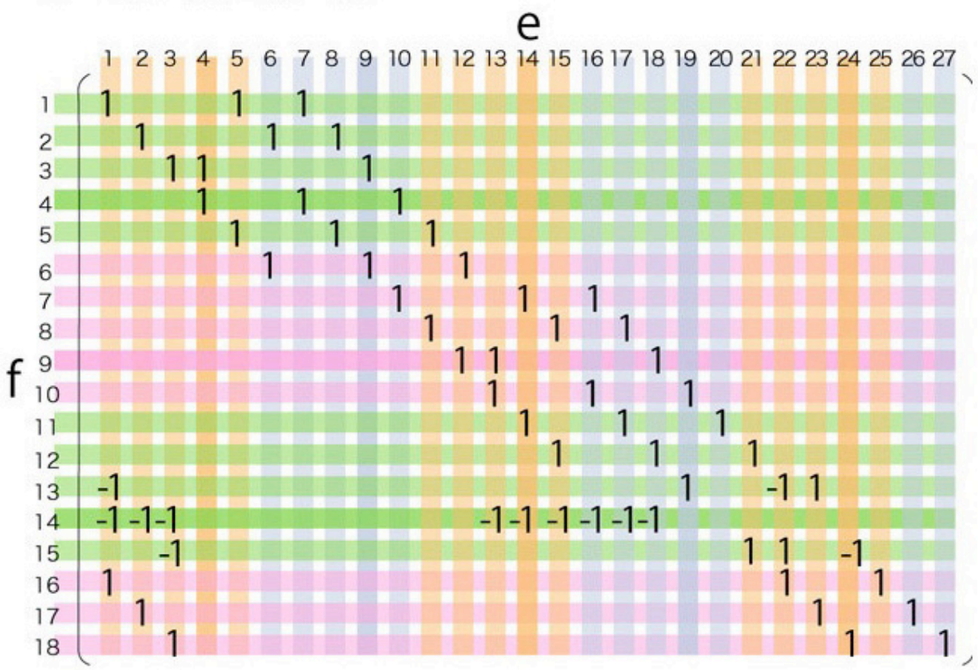
$$
\begin{aligned}
f_{15}^{(1)} &= f_{15} - f_{18} \\
f_{14}^{(1)} &= f_{14} - f_{17} \\
f_{13}^{(1)} &= f_{13} - f_{16}
\end{aligned}
$$



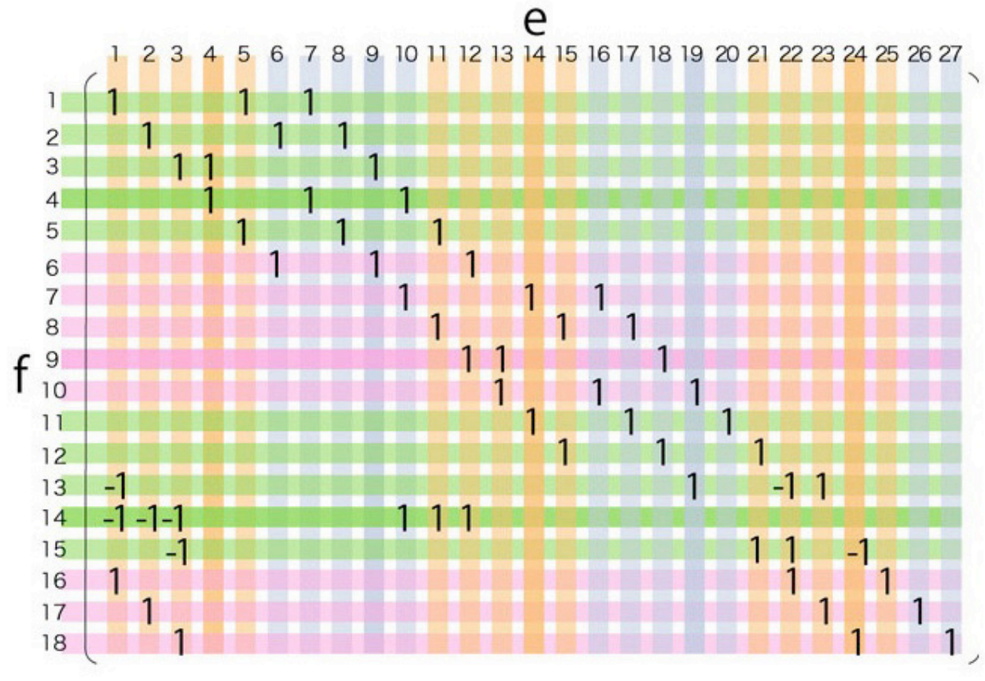
$$f_{14}^{(2)} = f_{14}^{(1)} + (f_{15}^{(1)} + f_{13}^{(1)})$$



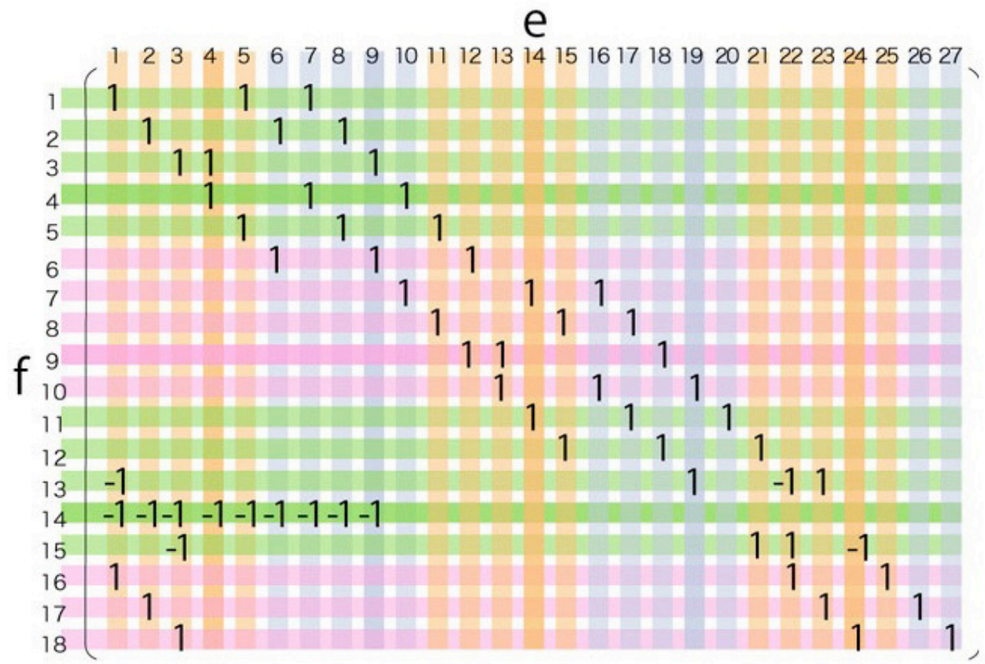

$$f_{14}^{(3)} = f_{14}^{(2)} - (f_{12} + f_{11} + f_{10})$$



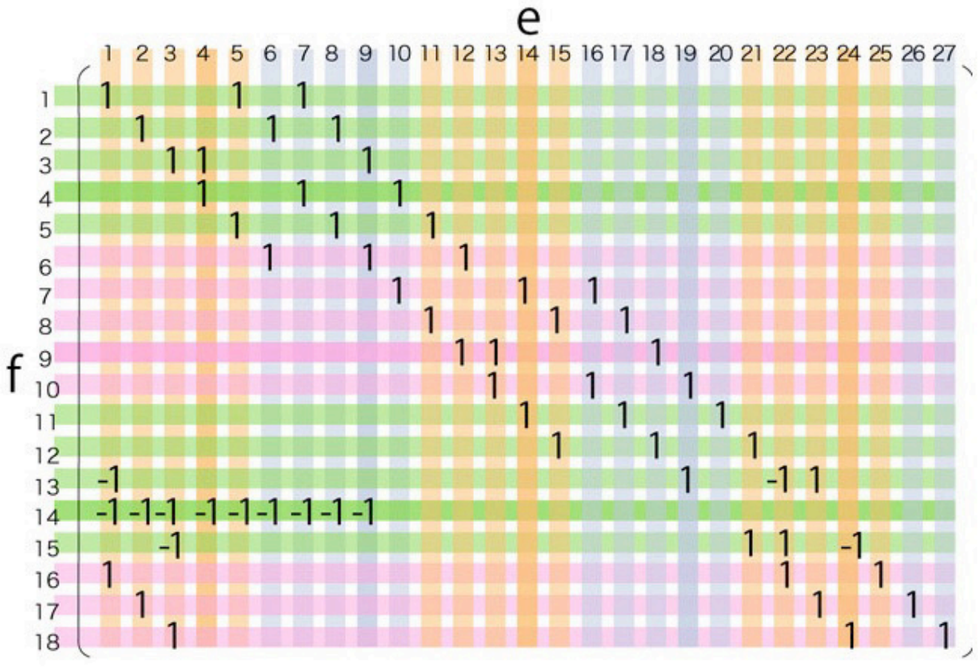

$$f_{14}^{(4)} = f_{14}^{(3)} + (f_9 + f_8 + f_7)$$



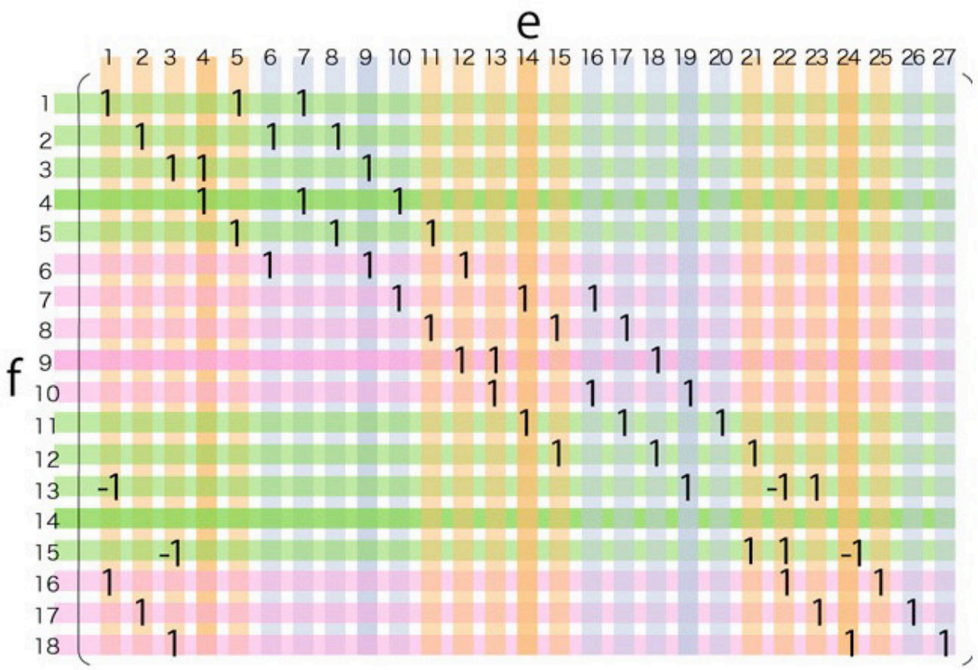

$$f_{14}^{(5)} = f_{14}^{(4)} - (f_6 + f_5 + f_4)$$



$$f_{14}^{(5)} = f_{14}^{(4)} - (f_6 + f_5 + f_4)$$




$$f_{14}^{(6)} = f_{14}^{(5)} + (f_3 + f_2 + f_1)$$





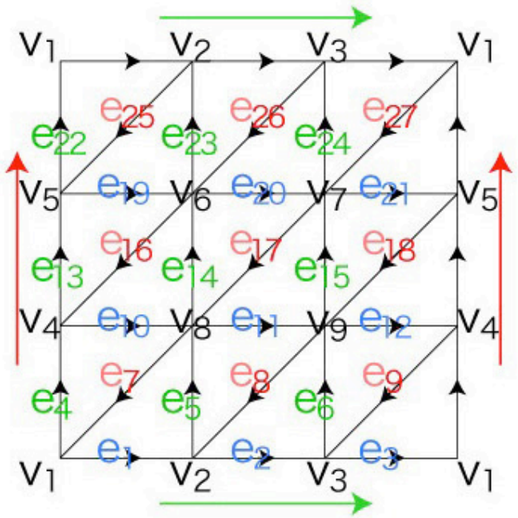


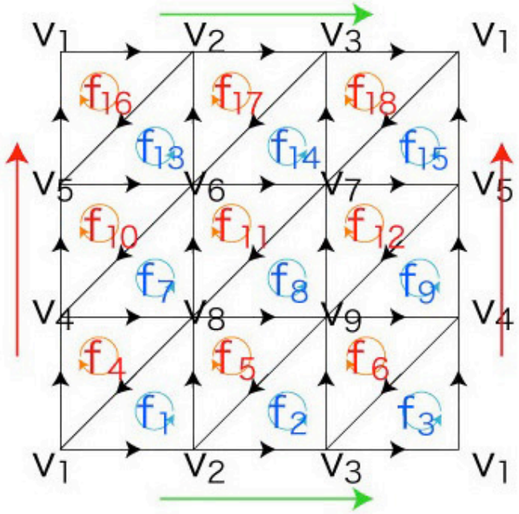

最後の行列は，つぎを示している：

$\partial_2 f_{15}$ を除いた 17個のバウンダリサイクル
$\partial_2 f_1, \cdots, \partial_2 f_{14}$, $\partial_2 f_{16}$, $\partial_2 f_{17}$, $\partial_2 f_{18}$ が，$Im(\partial_2)$ の基底を成す。
特に，$Im(\partial_2)$ は 17次元。

## 2.7 トーラスのホモロジー加群 $H_1$ の基底

$C_1, C_2$ の基底を，つぎのように定めた：





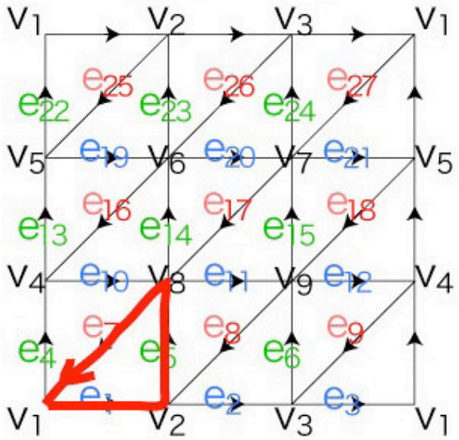



$\partial_2$ の表現行列の計算から，18 個の $\partial_2 f_k$ のうち $\partial_2 f_{15}$ を除く 17 個が，$Im(\partial_2)$ の基底を成すことが導かれた：

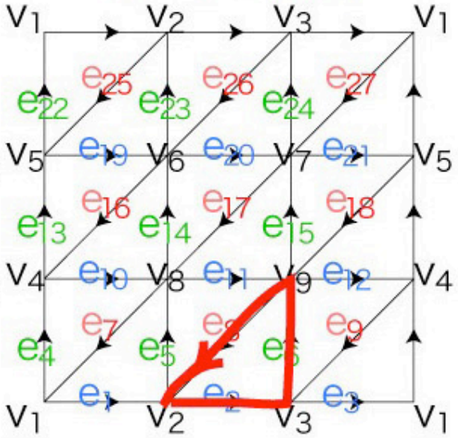
$$
\begin{aligned}
\partial_2 f_1 &= e_1 + e_5 + e_7 \\
\partial_2 f_2 &= e_2 + e_6 + e_8 \\
\partial_2 f_3 &= e_3 + e_4 + e_9 \\
\partial_2 f_4 &= e_4 + e_{10} + e_7 \\
\partial_2 f_5 &= e_5 + e_{11} + e_8 \\
\partial_2 f_6 &= e_6 + e_{12} + e_9 \\
\partial_2 f_7 &= e_{10} + e_{14} + e_{16} \\
\partial_2 f_8 &= e_{11} + e_{15} + e_{17} \\
\partial_2 f_9 &= e_{12} + e_{13} + e_{18} \\
\partial_2 f_{10} &= e_{13} + e_{19} + e_{16} \\
\partial_2 f_{11} &= e_{14} + e_{20} + e_{17} \\
\partial_2 f_{12} &= e_{15} + e_{21} + e_{18} \\
\partial_2 f_{13} &= e_{19} + e_{23} + e_{25} \\
\partial_2 f_{14} &= e_{20} + e_{24} + e_{26} \\
\partial_2 f_{16} &= e_{22} + e_1 + e_{25} \\
\partial_2 f_{17} &= e_{23} + e_2 + e_{26} \\
\partial_2 f_{18} &= e_{24} + e_3 + e_{27}
\end{aligned}
$$

また，$\partial_1$ の表現行列の計算から，つぎの 19 個のサイクルが $Ker(\partial_1)$ の基底を成すことが導かれた：：

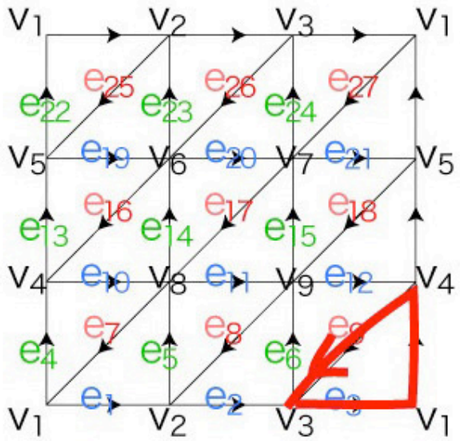
$c_1 = e_1 + e_5 + e_7$



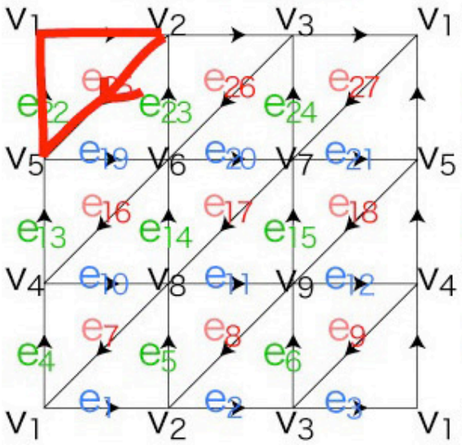
$c_2 = e_2 + e_6 + e_8$



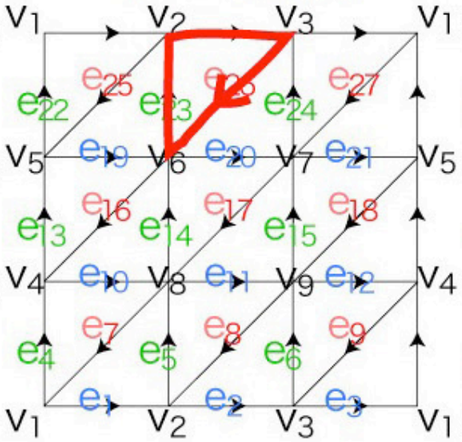
$c_3 = e_3 + e_4 + e_9$



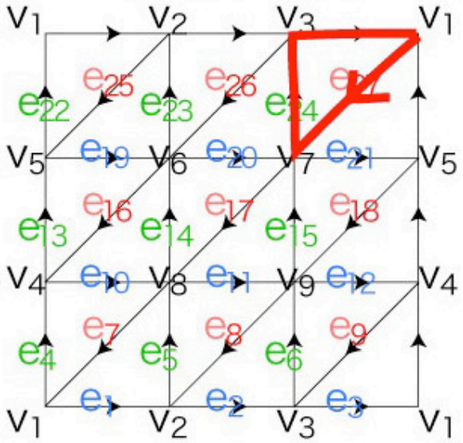
$c_4 = e_1 + e_{25} + e_{22}$



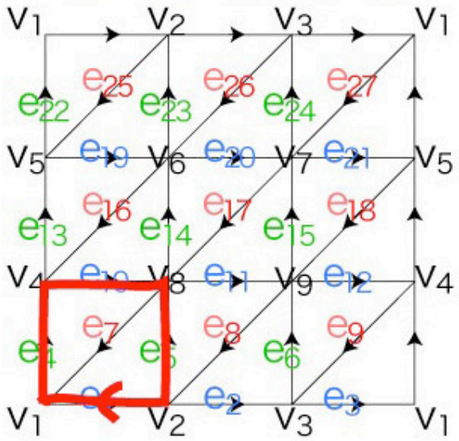
$c_5 = e_2 + e_{26} + e_{23}$



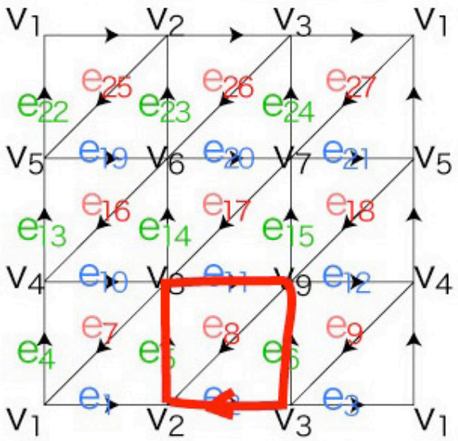
$c_6 = e_3 + e_{27} + e_{24}$



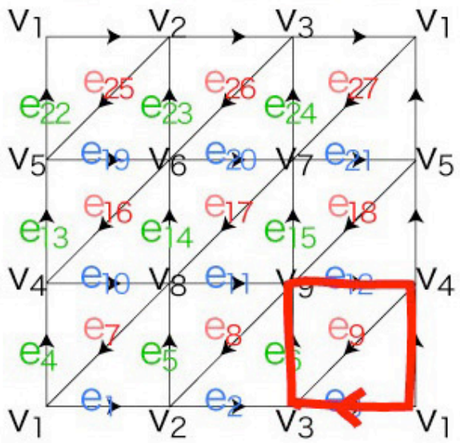
$c_7 = -e_1 + e_4 + e_{10} - e_5$



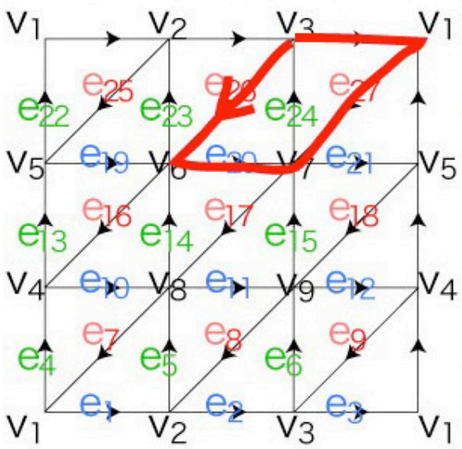
$c_8 = -e_2 + e_5 + e_{11} - e_6$



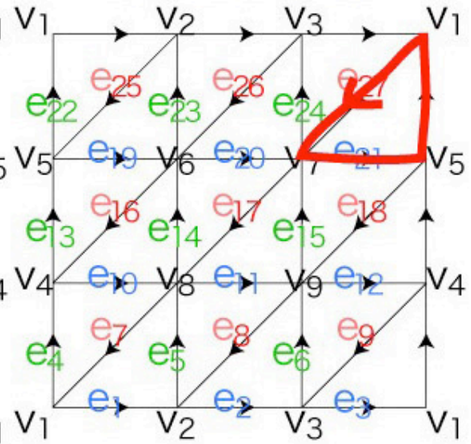
$c_9 = -e_3 + e_6 + e_{12} - e_4$



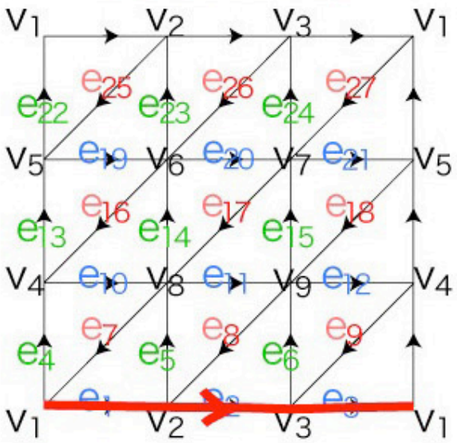
$c_{10} = -e_3 + e_{26} + e_{20} - e_{27}$



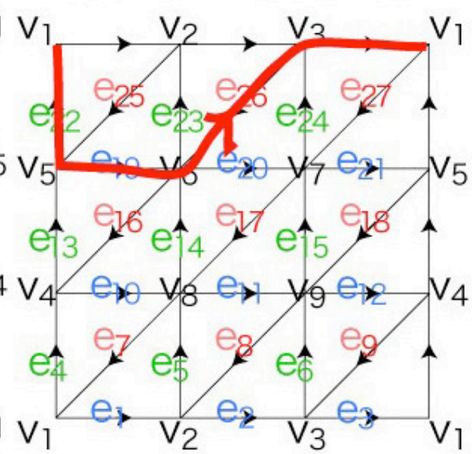
$c_{11} = e_{27} + e_{21} + e_{22}$



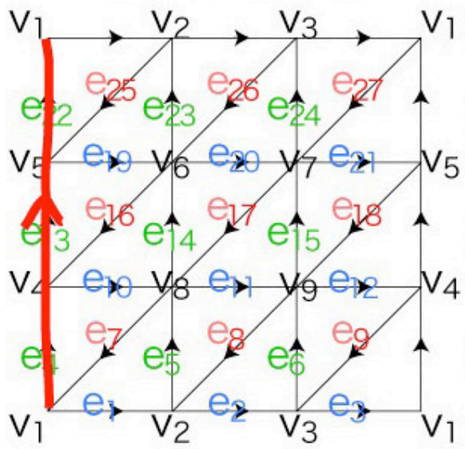
$c_{12} = e_1 + e_2 + e_3$



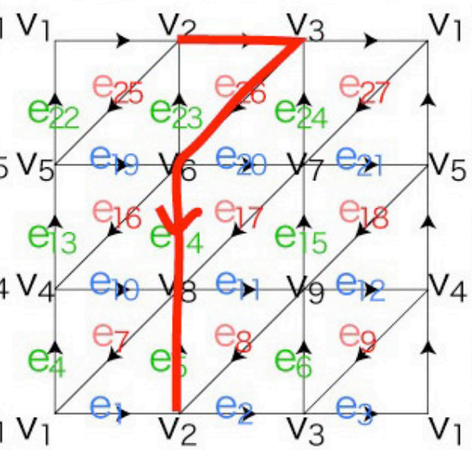
$c_{13} = e_3 - e_{22} + e_{19} - e_{26}$



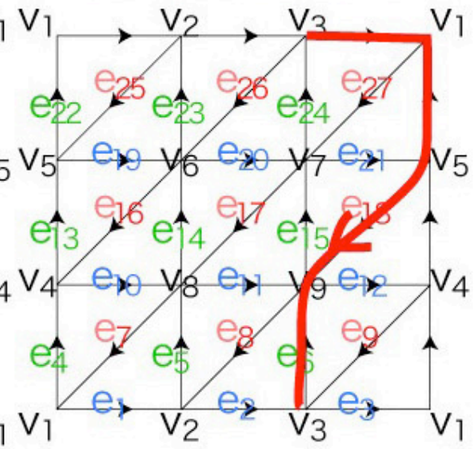
$c_{14} = e_4 + e_{13} + e_{22}$



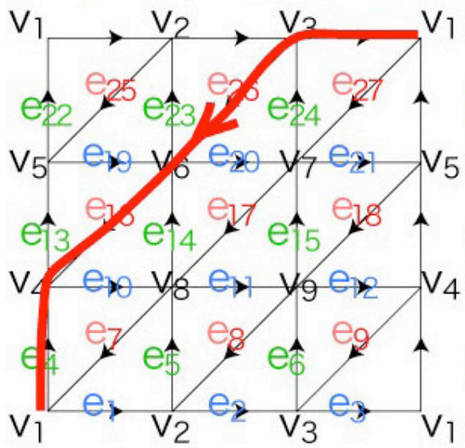
$c_{15} = e_2 + e_{26} - e_{14} - e_5$



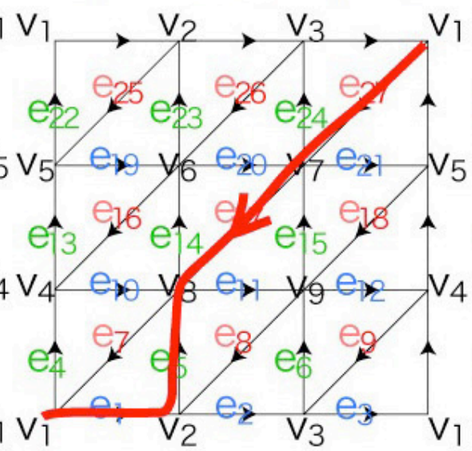
$c_{16} = e_3 - e_{22} + e_{18} - e_6$



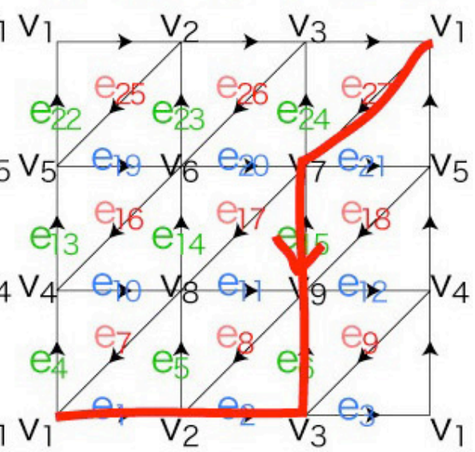
$c_{17} = -e_3 + e_{26} + e_{16} - e_4$



$c_{18} = -e_1 + e_{27} + e_{17} - e_5$



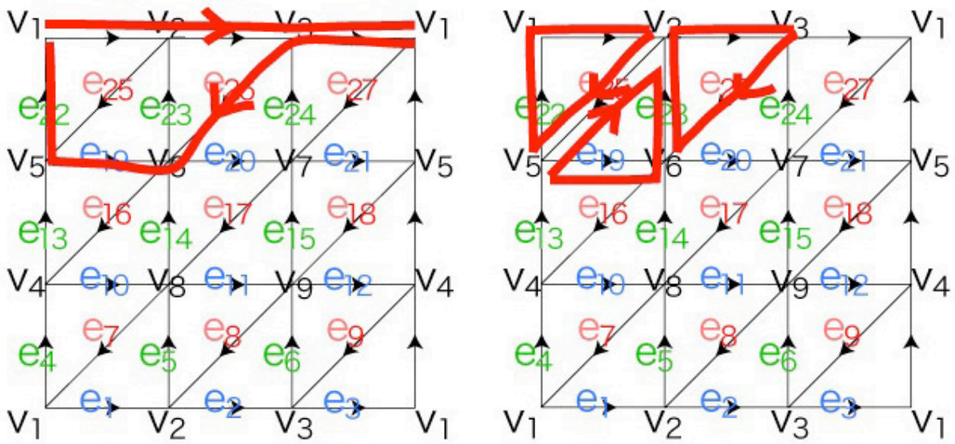
$c_{19} = e_{27} - e_{15} - e_6 - e_2 - e_1$



$c_1 \sim c_{11}$ は，バウンダリサイクルであり，$Im(\partial_2)$ に属する。

$c_{12}, c_{13}$ は，同じ同値類に属する：

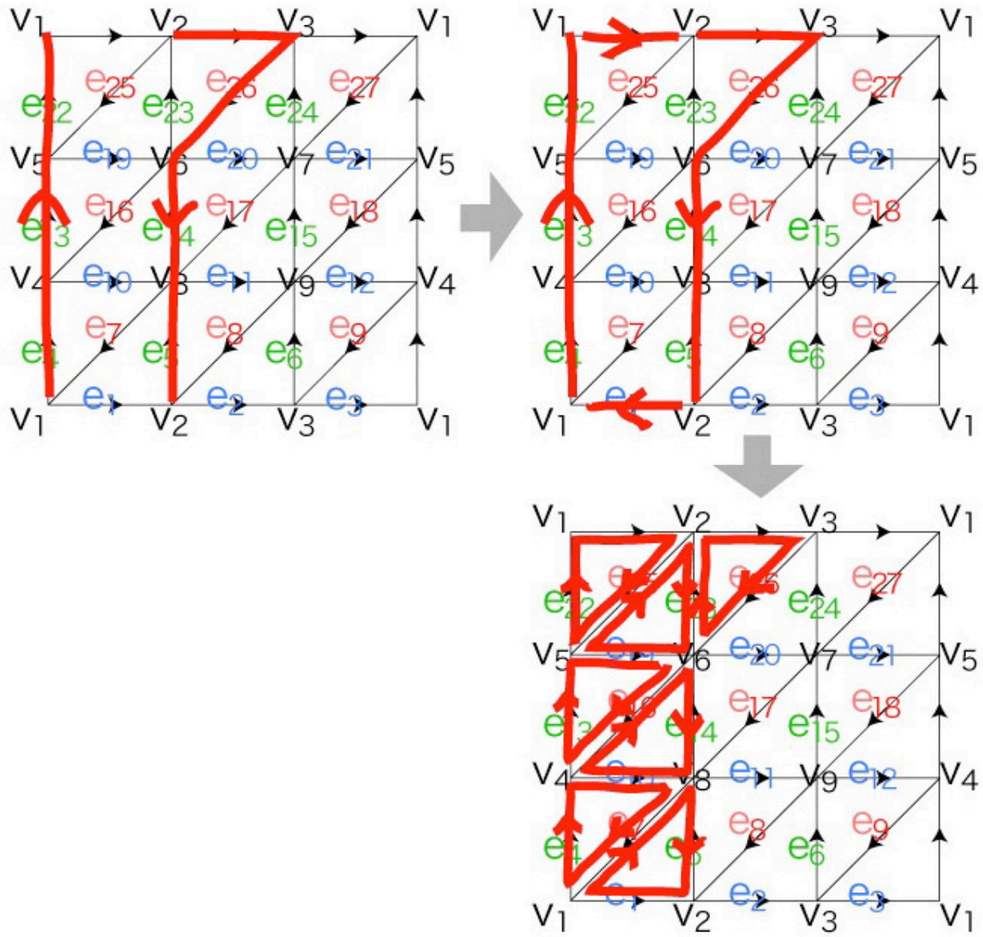
$$
\begin{aligned}
& c_{12} - c_{13} \\
= \ & (e_1 + e_2 + e_3) - (e_3 - e_{22} + e_{19} - e_{26}) \\
= \ & e_1 + e_2 + e_{26} - e_{19} + e_{22} \\
= \ & (e_1 + e_{25} + e_{22}) + (e_2 + e_{26} + e_{23}) - (e_{19} + e_{23} + e_{25}) \\
= \ & \partial_2 f_{16} + \partial_2 f_{17} - \partial_2 f_{13} \\
& \in Im(\partial_2)
\end{aligned}
$$



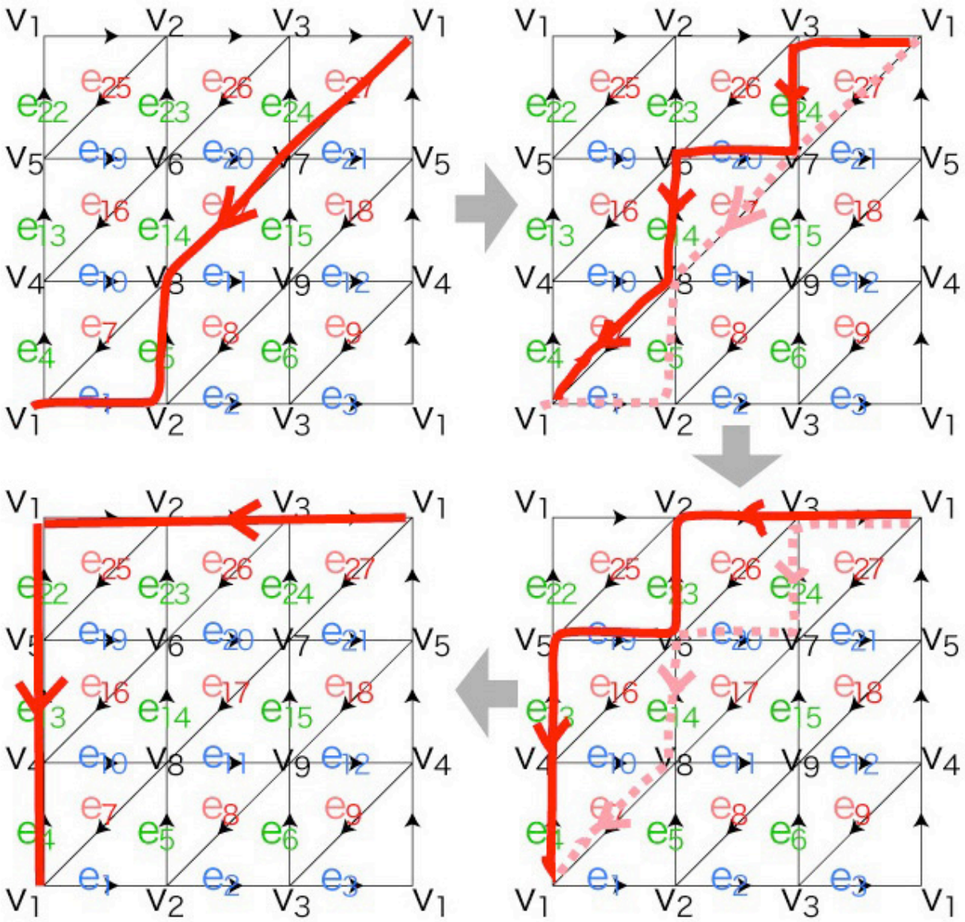



$-c_{14}, c_{15}, c_{16}$ は，同じ同値類に属する：

$$
\begin{aligned}
& c_{15} - (-c_{14}) \\
= \ & c_{14} + e_2 + c_{15} - e_2 \\
& \in Im(\partial_2)
\end{aligned}
$$

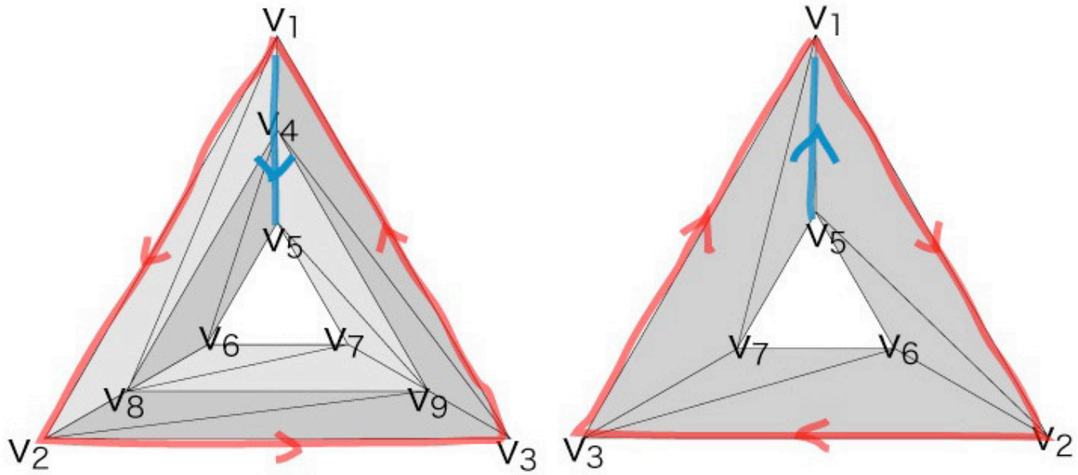


$c_{17}, c_{18}, c_{19}$ は，同値類 $-[c_{12}] - [c_{14}]$ に属する。
実際，いずれも $-c_{12} - c_{14}$ と同値になる。





$H_1 = Ker(\partial_1)/Im(\partial_2)$ は，次元が 19 - 17 = 2。
よって，２つの同値類 $[c_{12}]$，$[c_{14}]$ は，$H_1$ の基底になる。
特に，この２つの同値類が，「バウンダリサイクルでないサイクル」のタイプ
――異なる２タイプ――を表現していることになる。



## 3.　球面のホモロジー加群

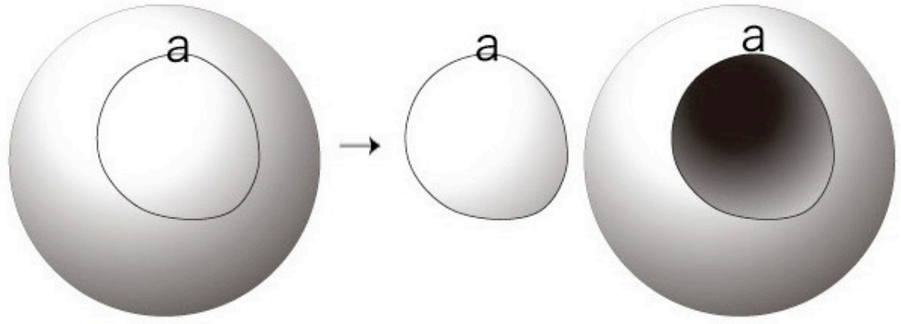
3.1　球面上の周回のタイポロジー
3.2　球面の三角形分割
3.3　$C_1$ の基底を定める（「*辺の向きを定める*」）
3.4　$C_2$ の基底を定める（「*面の向きを定める*」）
3.5　$\partial_1$ の表現行列
3.6　$\partial_2$ の表現行列
3.7　ホモロジー加群 $H_1 = 0$





## 3.1　球面上の周回のタイポロジー

「閉曲面を＜周回＞のタイプで特徴づける」を球面でやると，球面上の周回には１つのタイプしかない。
即ち，「面の境界になる周回」である：

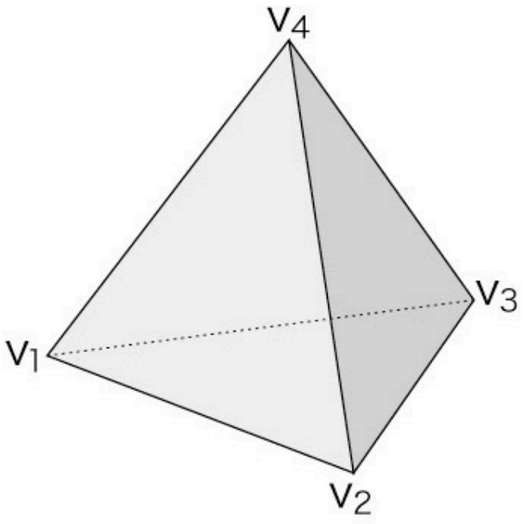



「面の境界になる」の面は，２通り

ここでは球面のホモロジー加群の導出をやるわけであるが，この直観はホモロジー加群によって裏付けられることになる。

## 3.2 球面の三角形分割

球面の三角形分割をつぎのようにつくる：

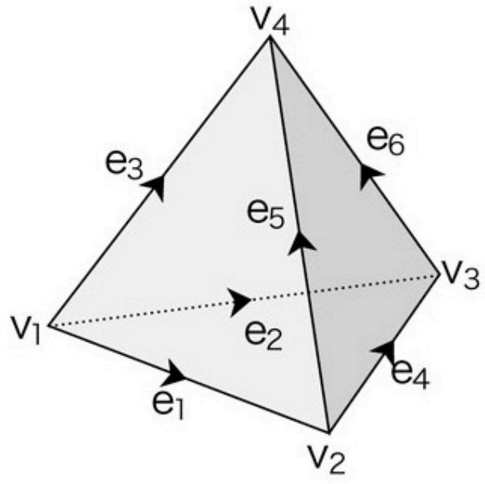






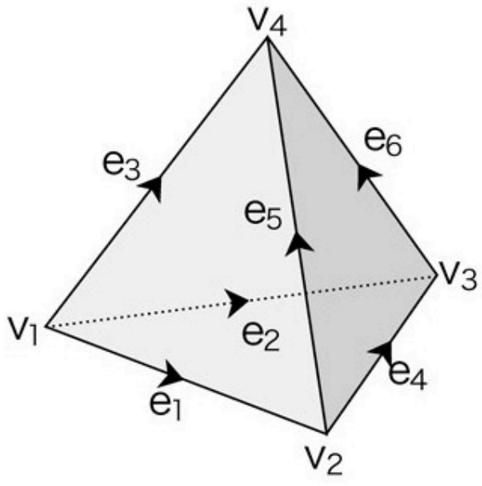

## 3.3 $C_1$ の基底を定める（「辺の向きを定める」）

バウンダリ写像を行列表現するために，先ず $C_1$ の基底を固定する。
これは，辺が現す二つの有向辺のうち，一つを基底の要素にすることである。
ここではつぎのようにする：



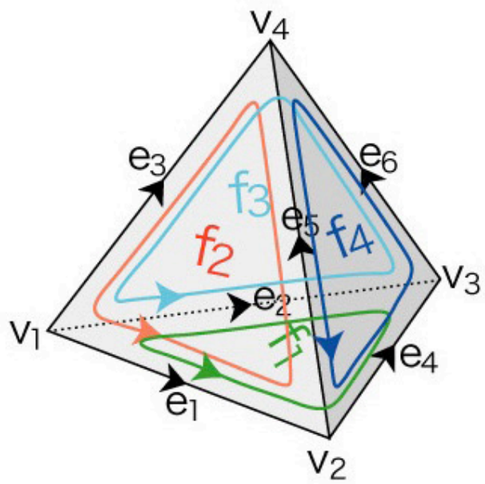
## 3.4 $C_2$ の基底を定める（「面の向きを定める」）

バウンダリ写像を行列表現するために，$C_1, C_2$ の基底を固定する。
$C_1$ は済ませた：



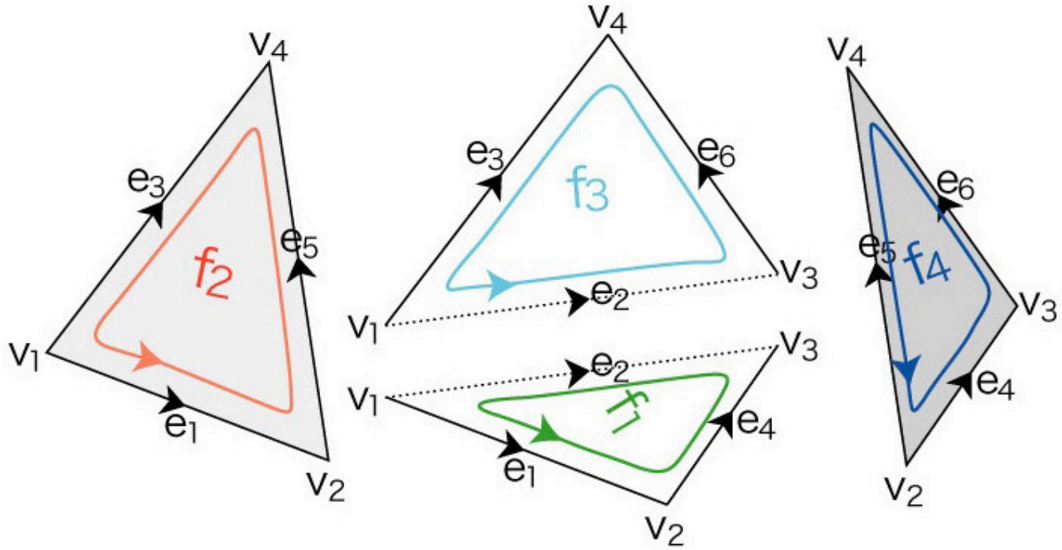

つぎは，$C_2$ である。

ここではつぎのようにする：





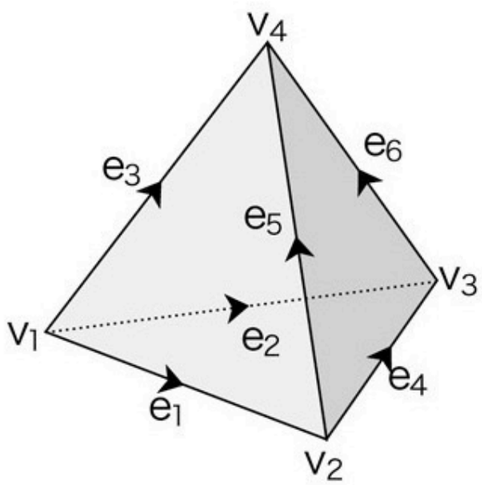



$$\partial_2 f_1 = e_1 + e_4 - e_2$$
$$\partial_2 f_2 = e_1 + e_5 - e_3$$
$$\partial_2 f_3 = e_2 + e_6 - e_3$$
$$\partial_2 f_4 = e_4 + e_6 - e_5$$

## 3.5 $\partial_1$ の表現行列

$C_1$ の基底を，つぎのように定めた：




$C_0$ の基底は，$\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ をとる。

各 $e_i$ のバウンダリは，

$$
\begin{aligned}
\partial e_1 &= v_2 - v_1 = -v_1 + v_2 \\
\partial e_2 &= v_3 - v_1 = -v_1 + v_3 \\
\partial e_3 &= v_4 - v_1 = -v_1 + v_4 \\
\partial e_4 &= v_3 - v_2 = -v_2 + v_3 \\
\partial e_5 &= v_4 - v_2 = -v_2 + v_4 \\
\partial e_6 &= v_4 - v_3 = -v_3 + v_1
\end{aligned}
$$

よって，基底 $\{e_i\}, \{v_j\}$ に対する $\partial_1 : C_1 \to C_0$ の表現行列は，

$$
\begin{array}{c}
 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
-1 & 1 & & \\
-1 & & 1 & \\
-1 & & & 1 \\
 & -1 & 1 & \\
 & -1 & & 1 \\
 & & -1 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$





これに対し，

$$
\begin{aligned}
e_5' &= e_5 - e_3 \\
e_6' &= e_6 - e_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{c}
 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5' \\ e_6'
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
-1 & 1 & & \\
-1 & & 1 & \\
-1 & & & 1 \\
 & -1 & 1 & \\
1 & -1 & & \\
1 & & -1 &
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
e_4' &= e_4 - e_2 \\
e_5'' &= e_5' + e_1 \\
e_6'' &= e_6' + e_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{c}
 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4' \\ e_5'' \\ e_6''
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
-1 & 1 & & \\
-1 & & 1 & \\
-1 & & & 1 \\
1 & -1 & & \\
 & & & \\
 & & &
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
e_4'' = e_4' + e_1
$$

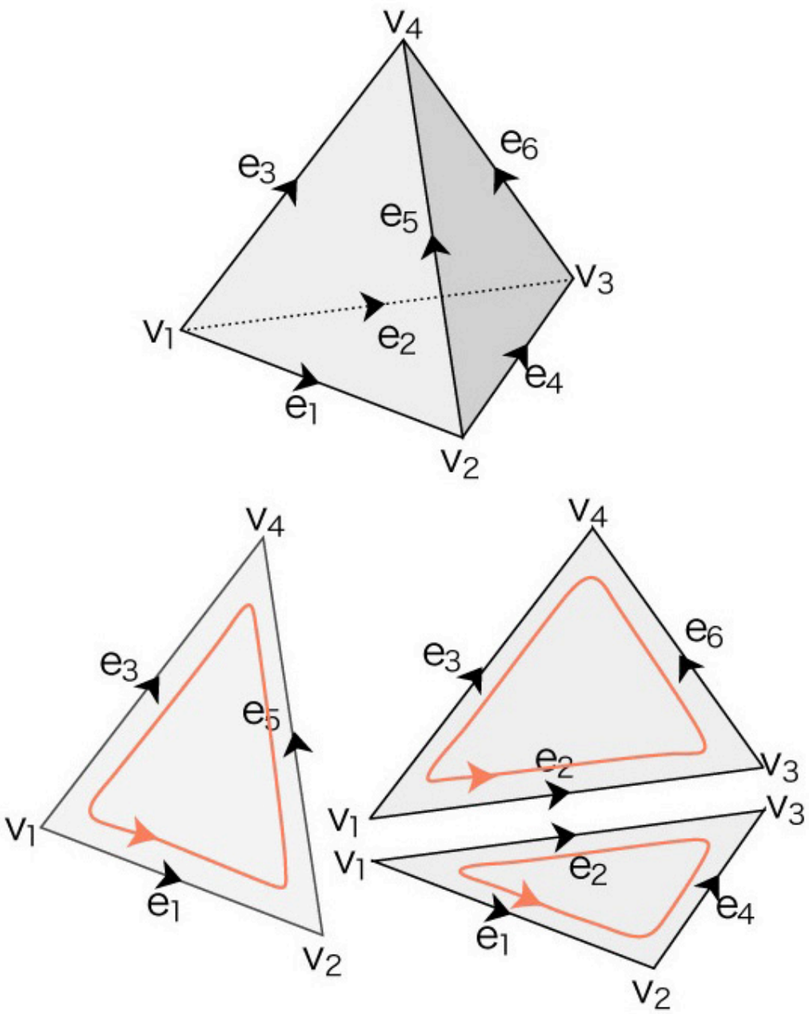
$$
\begin{array}{c}
 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4'' \\ e_5'' \\ e_6''
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
-1 & 1 & & \\
-1 & & 1 & \\
-1 & & & 1 \\
 & & & \\
 & & & \\
 & & &
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

この行列は，つぎのことを示している：

- 写像 $\partial_1$ では，6次元のうち3次元が潰れる。
  即ち，$Ker(\partial_1)$ が3次元，$Ker(\partial_1)$ の補空間が3次元。
- つぎの3つのサイクルが，$Ker(\partial_1)$ の基底を成す：

$$
\begin{aligned}
e_4'' &= e_4' + e_1 = (e_4 - e_2) + e_1 = e_1 + e_4 + (-e_2) \\
e_5'' &= e_5' + e_1 = (e_5 - e_3) + e_1 = e_1 + e_5 + (-e_3) \\
e_6'' &= e_6' + e_2 = (e_6 - e_3) + e_2 = e_2 + e_6 + (-e_3)
\end{aligned}
$$

- 有向辺 $e_1, e_2, e_3$ が，補空間の基底を成す。

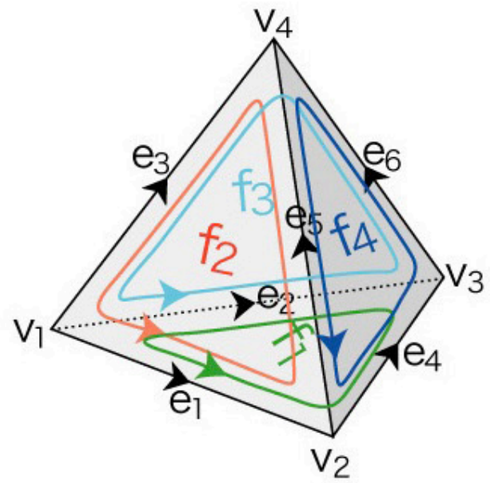


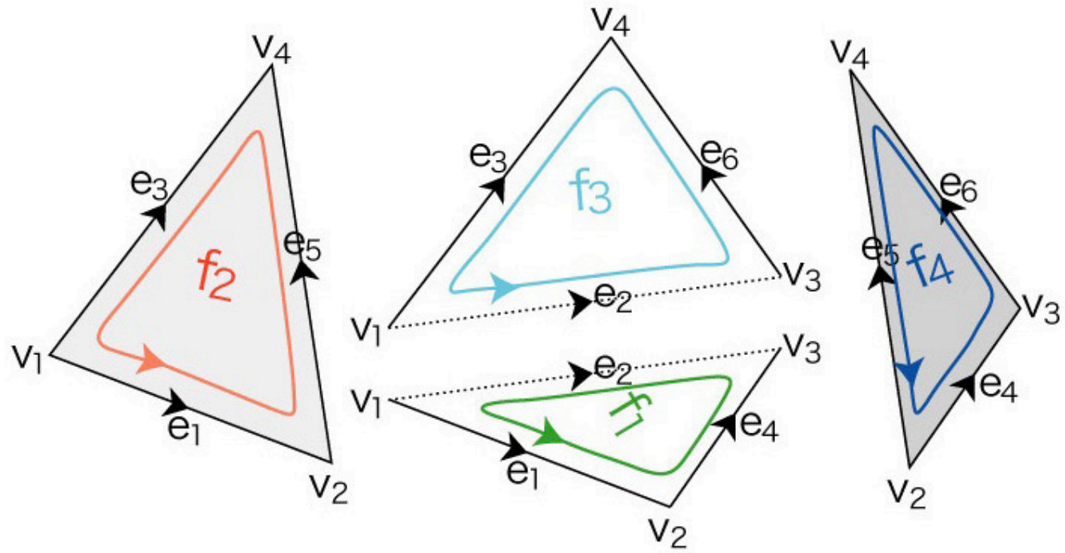





## 3.6 $\partial_2$ の表現行列

$C_2$ の基底を，つぎのように定めた：



$C_1$ の基底は，$\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ をとる。

各 $f_k$ のバウンダリは，

$$
\begin{aligned}
\partial f_1 &= e_1 + e_4 - e_2 = e_1 - e_2 + e_4 \\
\partial f_2 &= e_1 + e_5 - e_3 = e_1 - e_3 + e_5 \\
\partial f_3 &= e_2 + e_6 - e_3 = e_2 - e_3 + e_6 \\
\partial f_4 &= e_4 + e_6 - e_5 = e_4 - e_5 + e_8
\end{aligned}
$$

よって，基底 $\{f_k\}, \{e_i\}$ に対する $\partial_2 : C_2 \to C_1$ の表現行列は，

$$
\begin{array}{c}
 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & -1 & & 1 & & \\
1 & & -1 & & 1 & \\
 & 1 & -1 & & & 1 \\
 & & & 1 & -1 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

これに対し

$f_4' = f_4 - f_3$

$$
\begin{array}{c}
 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4'
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & -1 & & 1 & & \\
1 & & -1 & & 1 & \\
 & 1 & -1 & & & 1 \\
 & -1 & 1 & 1 & -1 &
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$f_4'' = f_4' + f_2$

$$
\begin{array}{c}
 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4''
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & -1 & & 1 & & \\
1 & & -1 & & 1 & \\
 & 1 & -1 & & & 1 \\
1 & -1 & & 1 & &
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

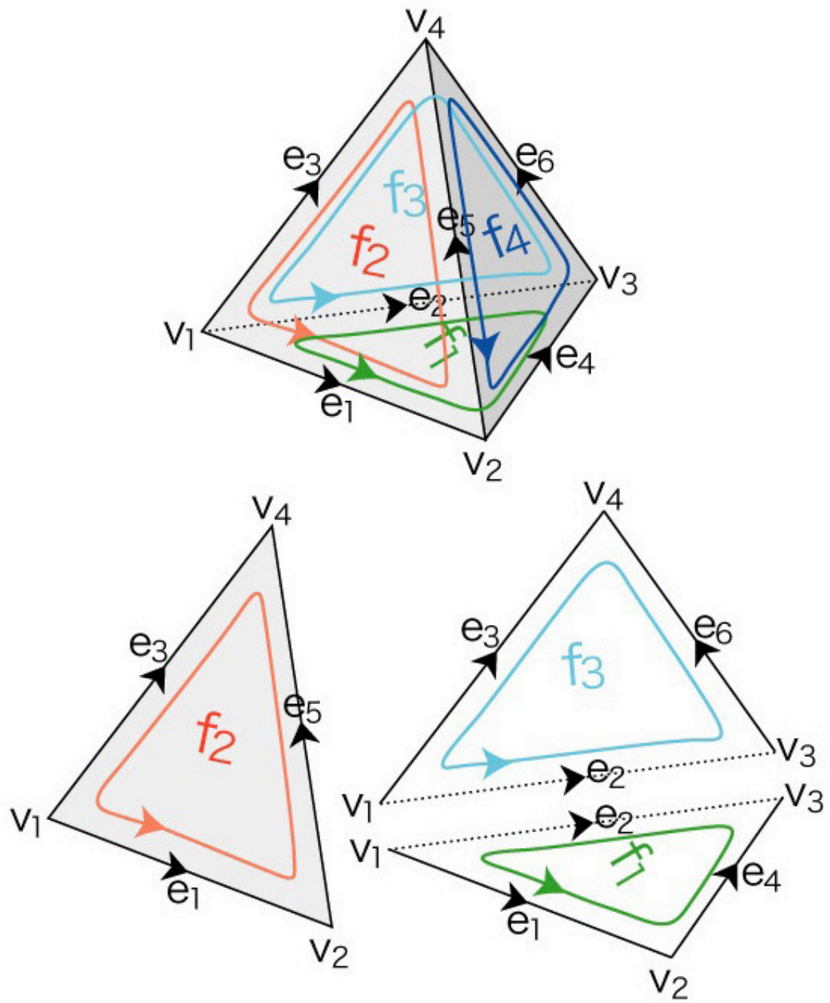
$f_4''' = f_4'' - f_1$

$$
\begin{array}{c}
 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4'''
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & -1 & & 1 & & \\
1 & & -1 & & 1 & \\
 & 1 & -1 & & & 1 \\
 & & & & &
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

この行列は，つぎのことを示している：

$Im(\partial_2)$ は３次元。
実際，つぎの３つのバウンダリサイクルがこれの基底を成す：

$$
\begin{aligned}
\partial f_1 &= e_1 + e_4 - e_2 \\
\partial f_2 &= e_1 + e_5 - e_3 \\
\partial f_3 &= e_2 + e_6 - e_3
\end{aligned}
$$



## 3.7 $H_1 = 0$

$\partial_1, \partial_2$ の表現行列の計算は，$Ker(\partial_1), Im(\partial_2)$ に対し同じ基底を導いた。
よって，$Ker(\partial_1) = Im(\partial_2)$ である。

特に，$Ker(\partial_1)$ の中での $Im(\partial_2)$ の補空間は，0。
即ち，球面のホモロジー加群 $H_1$ は，0である。

## 4.　閉じ

### 4.0.　おわりに





# 4.0 おわりに

大学の数学の授業は，昔から，何を話しているのさっぱりかわからない，というものである。
いまも定めしそうだろうと思うのは，大学教員が Web に載せている数学の講義録が，みなこの手合いだからである。
なぜこうなのか？
授業者当人が，「わかるとは？」「教えるとは？」をわかっていないためである。

数学をつくる者は，＜これをわかりたい＞から出発する。
そして，わかる方法を開発する
この方法が，数学になる。

翻って，数学の勉強は，つぎの勉強である：

　　この数学は，何をわかろうとするものか？
　　この数学で，どうしてそれがわかるのか？

しかし，大学での数学の授業は，この勉強をさせるものではない。
＜定義の提示 → 定理の提示 → 定理の証明＞をだらだら繰り返すばかり。
授業者当人がこれが授業だと思っているので，どうしようもない。

ホモロジー群の授業も，この類である。
Web でだいぶ探ってみてこうだったので，断定して構わないだろう。

というわけで，「ホモロジー群の授業とは，こういうことを教えてやるものだ」というのを書いた。
内容は，「球面とトーラスを別モノにする方法」である。

ホモロジー群を授業している大学教員のリアクションは「これっぽっちじゃ話にならない」だろうが，これで十分なのである。
そもそもホモロジー群は，トーラスの穴を増やす，次元を増やすに進めば，お手上げになるというものである。

実際，お手上げになるから，一般論に進む。
で，その一般論にどれほどの生産性があるかというと，無い。
一般論は，生産性とは無縁の体(てい)で立つことになるものである。
その身分は，「アート」。
翻って，一般論をやる者の身分は，「アーティスト」。

本テクストを書き起こそうとしたときは「けっこうたいへんかな」と思ったのだが，ちょうど十日で＜了＞となった。
「おわりに」として，この時間で済んだ理由を記しておく。
——文明論である。

先ず，大学にいたらこうはいかない。
大学は雑用ばかりで，こんなテクストをつくる時間はとれない。
（いまの大学は，もっとすさまじいことになっているのだろう。）
婆婆からリタイアしたら，この程度のテクストはホイホイつくれてしまうということなのである。

もう１つの理由は，ITである。
昔だと紙と鉛筆。
書き換え・編集のカットアンドペーストも，文字通りハサミとノリを使ったのである。

パブリッシュもウェブページが媒体なので，作図のファイルをそのまま埋め込める。
そしてドローイングソフトは，使い込むほどにその強力さに感服する。

そして，TeX。
ウェブサーバ連携 TeX として MathJax を使用している。
これが無かったら，数学のテクストづくりはたいへんな作業になる。
昔『四元数』のテクストをつくったことがあった（☞『四元数』）が，あれはひどかった。

> 読者は，本テクストのページの表示が一瞬ではなく時間がかかることが気になったであろう。 Webサーバないしブラウザにとって，TeX テクストの生成は時間がかかることなのである。

この上を望むとしたら，HTML + MathJax コンテンツが PDF に変換できることである。
そうなれば，『「ホモロジー群」とは何か』の PDF オンラインブックがつくれることになるのだけど＾＾；

宮 下 英 明（みやした ひであき）

1949 年，北海道生まれ。東京教育大学理学部数学科卒業。筑波大学博士課程数学研究科単位取得満期退学。理学修士。金沢大学教育学部助教授を経て北海道教育大学教育学部教授（数学教育専門），2015 年退職。

註：本論考は，つぎのサイトで継続される（これの進行に応じて本書を適宜更新する）：

http://m-ac.jp/me/subjects/geometry/theory/topology/homology/what/

# 「ホモロジー群」とは何か

2023-12-29　アップロード（サーバー：m-ac.jp)

著者・サーバ運営者　宮下英明

サーバ　m-ac.jp

http://m-ac.jp/

m@m-ac.jp