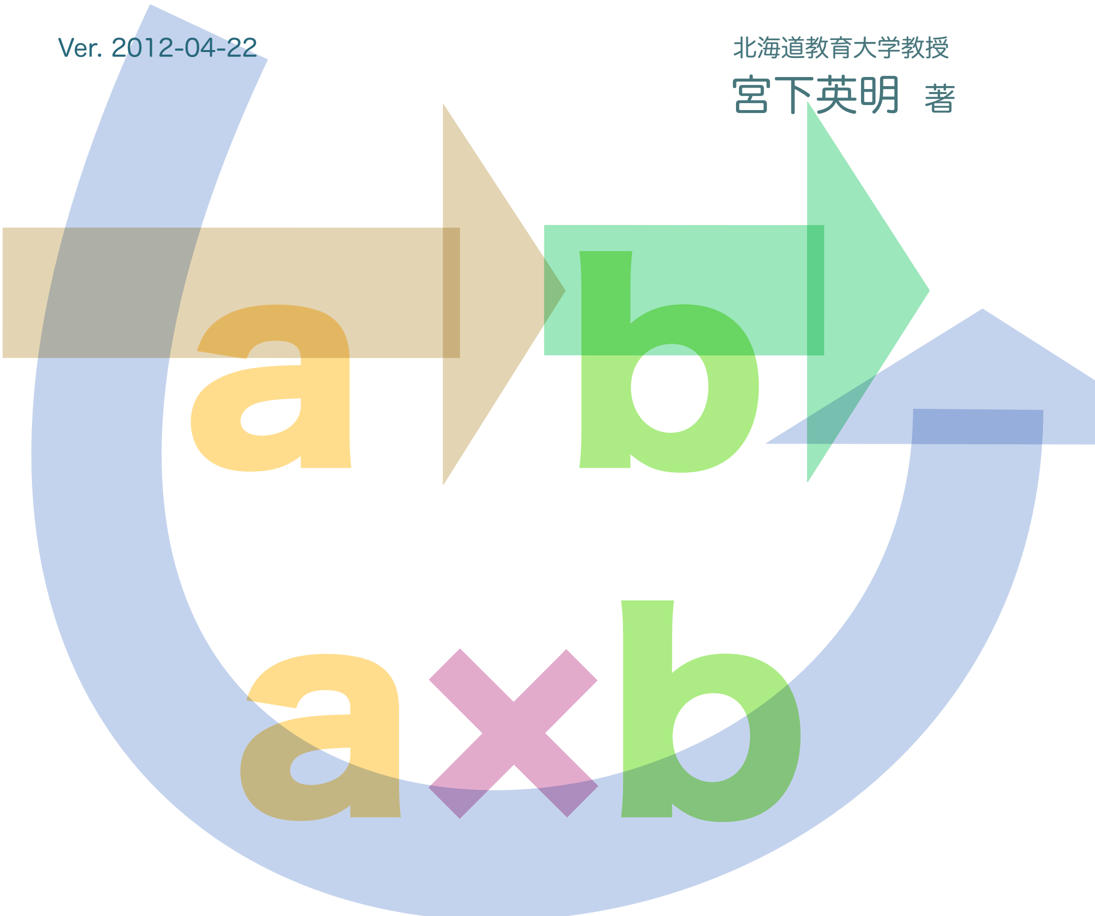
図解

現職教員・教員養成コース学生
＆数をわかりたい人のための
「かけ算の順序」論争がわかる本
シリーズ (3)

「かけ算の順序」の数学

Ver. 2012-04-22

北海道教育大学教授
宮下英明 著



文中の青色文字列は，ウェブページへのリンクであることを示しています。

「かけ算の順序」論争がわかる本 (3)

「かけ算の順序」の数学

本書について

本書は，

http://m-ac.jp/

のサイトで書き下ろしている『「かけ算の順序」の数学』を PDF 文書の形に改めたものです。

本シリーズについて

本書は,「「数」がわかる本」として作成しているシリーズのうちの, <「かけ算の順序」論争解説>シリーズの３になるものです。

<「かけ算の順序」論争解説>シリーズの趣旨は, 読者が論争の中の「数」を数学の「数」と対比できるようにすることです。

本シリーズは, <「数」がわかる本>シリーズに後続する内容になっています。また, <「数」の数学対学校数学>シリーズと併読される内容になっています。

「かけ算の順序」論争の中の「数」は, 数学の「数」とは違っています。特に, その論争は, はなから数学を外したものになっています。論争の「数」に対するときは, このことを理解している必要があります。そして, このことの理解には, 数学の「数」の理解が含まれるわけです。

「「数」がわかる本」シリーズは, 現在かなり大部になっています。そこで, この内容の<早わかり>としてつぎのテキストを用意していますので, 利用してください：

『「数の理解」15 講』

「数」がわかる本 既刊一覧

<「数」がわかる本>シリーズ （数学の「数」）

- 「数とは何か？」への答え
- いろいろな数が「数」であること
- いろいろな数がつくられるしくみ
- 四元数
- 量計算の論理
- 「数の理解」15 講
- 「小数」の数学

<「数」の数学対学校数学>シリーズ （イデオロギーの「数」）

- 数は量の比 —「数は量の抽象」ではない
- 量とは何か？—学校数学の「量」
- 学校数学の「かけ算・わり算」のとらえには, 数学が必要
- 「分数のかけ算・わり算」がペンキを塗る話になるわけ
- 「数直線でかけ算・わり算」は, わかるのがおかしい

<「かけ算の順序」論争解説>シリーズ （モンスターの「数」）

- 「かけ算の順序」論争概説
- 「かけ算の順序」論争——延々と続けられるわけ
- 「かけ算の順序」の数学 （本テクスト）
- 「かけ算の順序」のイデオロギー

序

2011-01-29

同日に初代『「かけ算の順序」の数学』を本テクストの『「かけ算の順序」の数学』と『「かけ算の順序」のイデオロギー』に分けたことにより，本「序」を更新。

2011-01-20

同日に作成した『「数とは何か？」への答え』に言及するため，本「序」を更新。

2010-12-18

2010-12-17 に作成した『量とは何か？——学校数学の「量」と数学の「量」』に言及するため，本「序」を更新。

本書は，「数がわかる本」シリーズ数学編の第 6 です。

「数がわかる本」シリーズは，現在つぎのようになっています：

数学編

『「数とは何か？」への答え』
『いろいろな数がつくられるしくみ』
『いろいろな数が「数」であること』
『四元数』
『量計算の論理』
『「かけ算の順序」の数学』(本テクスト)

学校数学編 (あるいはイデオロギー / 素人考えについて)

『数学は「数は量の比」, 学校数学は「数は量の抽象」
— 学校数学はなぜ「数は量の抽象」を択ったのか？』
『量とは何か？——学校数学の「量」と数学の「量」』
『「かけ算の順序」のイデオロギー』

講義編

『「数の理解」15 講』

数学編の『「数とは何か？」への答え』は，「数と量」の基礎論 / 総論になります。そして数学編のほかの 5 テクストは，各論 / 詳説の位置付けになります。

『いろいろな数がつくられるしくみ』では，

自然数 → 分数 → 正負の数 → 複素数

と流れる「数の構築」を扱いました。

これらが「数」であるという意味は，これらが「数」の形式をもっているということです。『いろいろな数が「数」であること』では, この「数」の形式を，自然数・分数・正負の数・複素数を横断する形で，示しました。

「数」の構築は，既存の数の系を拡張するように行われます。そして数の拡張を行うたびごとに，「数」の既存の概念で通用しなくところが現れてきます。このとき「数」の概念の再調整が必要になります。このことを改めて確認しようという趣旨から，シリーズに『四元数』を加えました。実際，四元数までいくと，「積の可換性」が「数」の条件でなくなります。

「数と量」の論理は，量計算の実際のところではっきりしてきます。量計算は各テクストに現れていますが, 一冊でまとめて見られるように『量

計算の論理』を作成しました。

そして本テクスト『「かけ算の順序」の数学』ですが，初代『「かけ算の順序」の数学』を本テクストの『「かけ算の順序」の数学』と『「かけ算の順序」のイデオロギー』に分けました。
「かけ算の順序」は，いろいろと話題に上り活発な論議を起こすテーマになっていますが，数学を基盤にもってないと簡単に空中戦になってしまいます。よって，このテーマをとりあげることは，「数」の数学に目を向けるよいきっかけになると考え，初代『「かけ算の順序」の数学』を作成しました。

なお, 本書は,『いろいろな数がつくられるしくみ』『いろいろな数が「数」であること』の２テクストに読者が一通り目を通すことを，想定しています。

つぎに，学校数学編の３テクストについて。

学校数学の「数」は数学になっていません。このことを述べるために,『数学は「数は量の比」, 学校数学は「数は量の抽象」— 学校数学はなぜ「数は量の抽象」を択ったのか？』を作成しました。

『量とは何か？——学校数学の「量」と数学の「量」』は，『数学は「数は量の比」, 学校数学は「数は量の抽象」— 学校数学はなぜ「数は量の抽象」を択ったのか？』の分量がかさんだため，これの導入・簡約版になるよう作成しました。

「かけ算の順序」は，素人の素朴な疑問になるのと，このテーマをイデオロギーでずっとやってきたひとの問題になるのとでは，意味合いがまったく違ってきます。したがって，「かけ算の順序」の話も，これの数学を入門者に教えるように論ずるのと，「かけ算の順序」のイデオロギーを論ずるのとでは，まったく位相が違ってきます。
初代『「かけ算の順序」の数学』はこの２つがいっしょになっていました。そこでこれを，本テクストの『「かけ算の順序」の数学』と『「かけ算の順序」のイデオロギー』に分けました。

目次

本文イラスト，ページレイアウト，表紙デザイン：著者

0.　導入

0.1　はじめに

算数科の積の立式の問題では，２数を並べる順序が (明示的に，あるいは暗黙に) 問われてくる。そしてこの順序が，論議 / 論争される。
つぎのようなかんじである：

1. 「飴が２個はいった袋が３つある。飴の個数を求める式は？」
   「２m (メートル) の棒を３本つなげる。この長さを求める式は？」
   の問いに「3×2」と答える生徒を，教師がバツにする（「2×3」ならマル)。
   順序なんか関係ないじゃないか！
   （どうせ，2×3 ＝ 3×2 なんだし‥‥）

2. 「タテ２cm，ヨコ３cm の長方形の面積を求める式は？」
   90゜回転したら，タテ，ヨコはそれぞれヨコ，タテになる。
   立式が 2×3，3×2 のどっちかということはない。
   つまり，順序なんか関係ない！

さらに，この順序の問題は見掛けが簡単なので，子どものテストのマル・バツで親がヒート・アップしやすい。
しかし，この親が学校に文句を言ってきたり新聞に投書したりみたいになると，これは正真正銘の「モンスター・ペアレント」である。

実際，「モンスター」とは「行為が規範から逸脱しており，しかもそのことを意識していない者」のことであるが，数学を知らなければ，数学という規範から自ずと逸脱してしまい，しかも逸脱しているとは思わないわけであるから，簡単にモンスターになってしまう。

そこで，せっかくの「かけ算の順序」論議 / 論争に水をさす格好になるかも知れないが，本テクストで「かけ算の順序」の数学を改めて押さえることにする。

0.2　結論から：「かけ算には順序がある」が正しい

「かけ算の順序」の数学は単純であるから，最初にこれを示しておく：

1.「**2個の3個は何個？**」

問題を図式化	$\text{2個} \xrightarrow{3} \text{何個}$
「2個」と「何個」を分析	$\begin{tikzcd} \text{個} \arrow[r, "2"] \arrow[rr, bend right, "\text{何}"'] & \text{2個} \arrow[r, "3"] & \text{何個} \end{tikzcd}$
記号「×」の文法	$\begin{tikzcd} \text{個} \arrow[r, "2"] \arrow[rr, bend right, "\text{何} = 2 \times 3"'] & \text{2個} \arrow[r, "3"] & \text{何個} \end{tikzcd}$

立式は，「2× 3」であり「3× 2」ではない。

2.「**2mの3倍は何m？**」

問題を図式化	$\text{2m} \xrightarrow{3} \text{何m}$
「2m」と「何m」を分析	$\begin{tikzcd} \text{m} \arrow[r, "2"] \arrow[rr, bend right, "\text{何}"'] & \text{2m} \arrow[r, "3"] & \text{何m} \end{tikzcd}$
記号「×」の文法	$\begin{tikzcd} \text{m} \arrow[r, "2"] \arrow[rr, bend right, "\text{何} = 2 \times 3"'] & \text{2m} \arrow[r, "3"] & \text{何m} \end{tikzcd}$

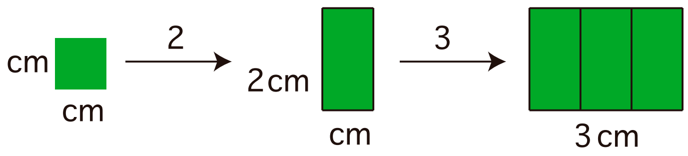
立式は，「2× 3」であり「3× 2」ではない。

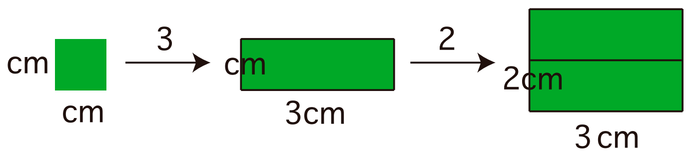
このように, つぎが「文章題から数の積の式を立てる」のプロセスになる:

1. 文章題を ,「量の倍」の問題に読む。
2. 「量の倍」を ,「単位の倍の倍」に分析する。
3. 数の「×」の文法に従い,「単位の倍の倍」から数の積の式を導く。

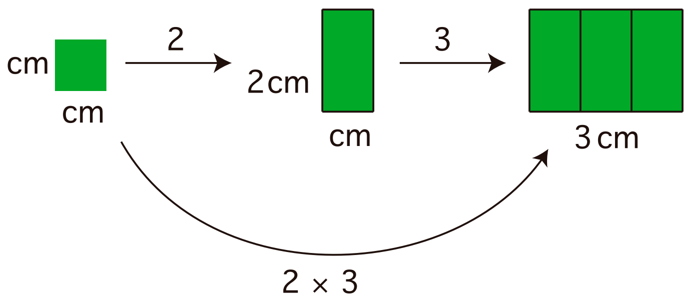
3.「タテ２cm，ヨコ３cm の長方形の面積は何 cm^2 ？」

この問題は，「単位の倍の倍」のつくり方が２つある：

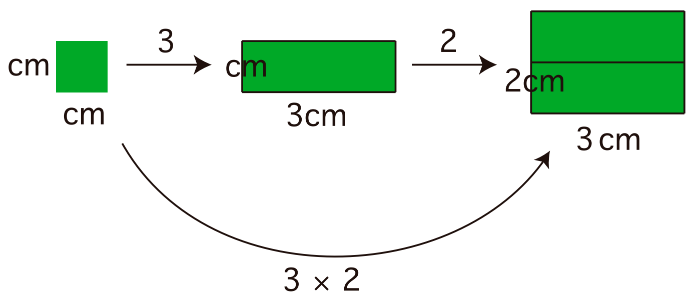




「２倍の３倍」では，立式は「２× ３」であり「３× ２」ではない。



「３倍の２倍」では，立式は「３× ２」であり「２× ３」ではない。



「かけ算の順序」論議 / 論争は，延々と終わらない。それは，「文章題から数の積の式を立てる」のプロセスを，数学で考えられないためである。このプロセスを，もう一度記しておく：

1. 文章題を，「量の倍」の問題に読む。
2. 「量の倍」を，「単位の倍の倍」に分析する。
3. 数の「×」の文法に従い，「単位の倍の倍」から数の積の式を導く。

「かけ算の順序」論議 / 論争は，《文章題から「単位の倍の倍」を導く》の考えをもたない。 そのかわりに，非数学のモンスター論理が様々に展開される。
実際，「単位の倍の倍」が一旦立てられれば，数学を知っている者なら，これを数の積の式に還元する推論は一意になる。特に，かけ算の順序は一意に決まる。

以上のように，「かけ算には順序がある」「かけ算には順序がない」では，「かけ算には順序がある」が正しい。

1.「かけ算の順序」のモンスター論議/論争

1.1　日常感覚で話題にする——内容を数学と思わない

「かけ算の順序」論議 / 論争では，「順序」を日常感覚で論じる。
これは，つぎのことを示している：

　「*順序は，日常感覚で論じて十分*」と，無意識に思われている。

論じている主題は数学なのだが，これが数学であるという意識がない。

実際，日常感覚で論じられると思っていられるから，自由な議論ができるわけである。「これは数学である」と言う者が出てきたら，みんな「*その数学は，どうもわたしのやったことのないもののようだ*」になってしまい，談義がやりにくくなってしまう。

数学は，日常感覚とひどく違う。
日常感覚でアタリマエのことが，数学ではすごく複雑なことになって，数学の本にすればずっと後の方に出てくる内容になる。

例えば，日常感覚は簡単に「*リンゴを２行３列に並べる*」と言う。そして「*これが2× 3の形だ*」などと言ったりする。
しかし,「２行３列に並べた形」は, 数学の「2× 3」の意味にはならない。
実際, 数学が「2× 3」を「２行３列に並べた形」で定義するとなったら, ひどく大きな道具立てが必要になってくる。例えば,「２行３列に並べる」を行う空間を導入しなければならない。このときどういうことが要件になるかを探り, 要件を備えた空間を定める。そして,「２行３列に並べる」を数学的表現に置き換える。

もちろん，数学はこんなことはやらない。こういう複雑なことをやり終えたところから「2× 3」を導入したら，それは必ず論理の後先 (あとさき) をひっくり返した循環論法になっている。——「循環論法」というのは，《「２行３列に並べる」を数学にしたときは，その概念構築の過程のどこかで「×」を含むぐあいになっている》ということである。

1.2「問題の論理的還元」の方法に無縁

量の問題は，「問題の論理的還元のステップを進める」という形で解くことになる。
積の立式は，このプロセスの中で現れてくる。
そしてこの場合，問題をどう構造化したかで，積の立式での２数の並ぶ順序が自ずと決まる。

「*自分の子どもが算数の試験で，かけ算の２数の順序を逆にしてバツ (×) をもらった。どっちだっていいじゃないか！*」を言ってしまうのは,「問題の論理的還元」の概念が持たれていないためである。

「問題の論理的還元」の概念が持てるようになるには，＜論理にこだわった数学の修行＞が必要になる。
＜論理にこだわる＞は，数学を勉強したら自ずと身につくというものではない。＜論理にこだわる＞を意識的に修行しなければ，身につかない。
特に，「数学が得意・できる」は，「問題の論理的還元ができる」を意味しない。

こういうわけで，一般者に対しては，「積の立式における２数を並べる順序」の論理を改めて伝えることも容易ではない。──実際，これをやるのは，学校数学のやり直しということになる。

1.3「構成主義」の方法に無縁 — 思いつきの理屈で自足

数学は，構成主義を方法論にしている。すなわち，数学的概念・命題をとことん還元したところから，体系の構築を開始する。

最も還元したレベルは，形式言語である。記号と文法を定めるところから，始める。
つぎに真理値を導入し，推論規則を定め，出発点にする真理命題 (公理) を定める。
以降，推論によって真な命題 (定理) を導き，定義によって新しい概念を導入するという形で，体系の構築が進行する。

ユークリッドの『原論』は，この構成主義の古典である。
Bourbaki の『数学原論』は 1930 年代に開始された数学テクスト作成プロジェクトであるが，構成主義を学ぶのに最良の数学テクストは，以来ずっとこれである。

数学の構成主義の方法は，数学をある程度専門的にやらないと，身につかない。
数学の各主題は構成の中に位置づき，構築の順番に縛られている。しかし，構成主義の方法とはこれまで無縁でやってきた者は，数学を博物学のように見てしまう。すなわち，数学の各主題をバラバラに見て，単独に取り出す。
そしてこんなふうに単独に取り出した主題Ａから主題Ｂを導こうとするときは，決まって循環論法をおかすことになる。

数学の方法論としての構成主義がわからない限り，循環論法は矯正されない。そして，矯正されない循環論法は，数学における「モンスター」である。

一般に，経験値の低い領域では，ひとは自分の思いつきの理屈で満足する者になる。この領域で経験値を積むほどに，ひとは自分に懐疑的になり，謙虚になる。
一見逆のようだが，事実はこの通りである。

1.4「かけ算の順序」の数学は，敷居が高い

「*かけ算の順序なんか，どうでもいいじゃないか！*」の訴えに対しては，つぎのように答えることになる：

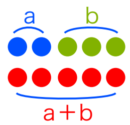
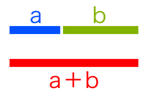
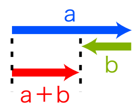
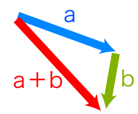
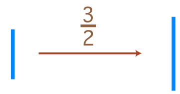
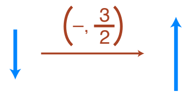
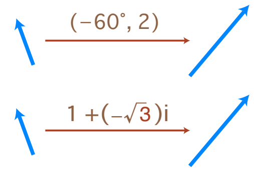
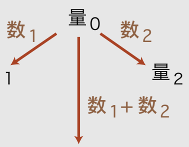
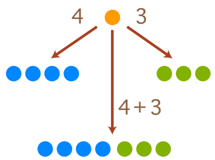
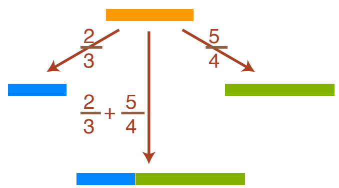
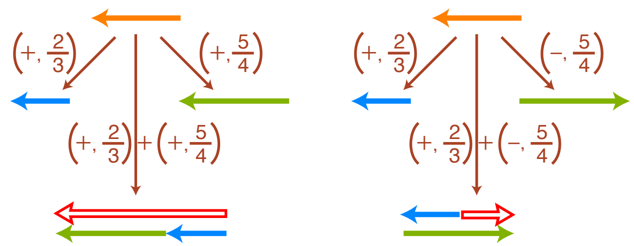
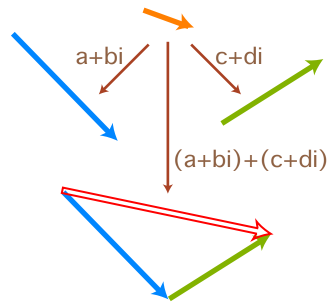
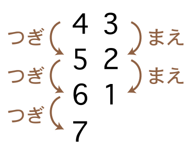
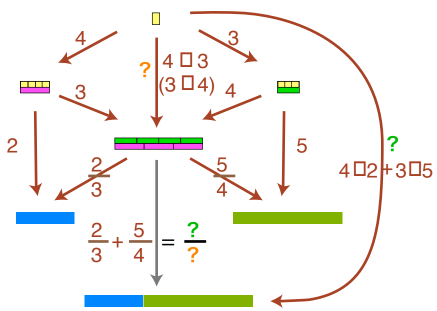
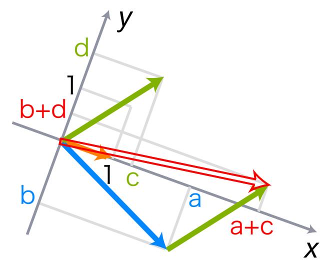
> 「*理論的 (数学的) には順序が問題になり，*
> *実際 / 実用的には順序は問題にならない (ことが多いかも)。*」

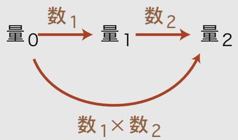
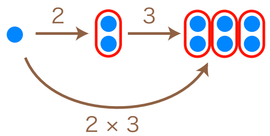
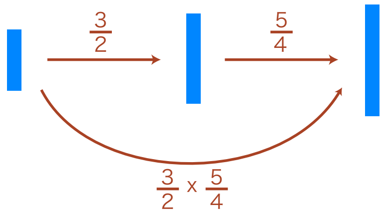
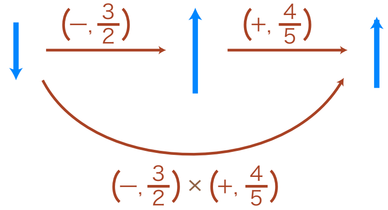
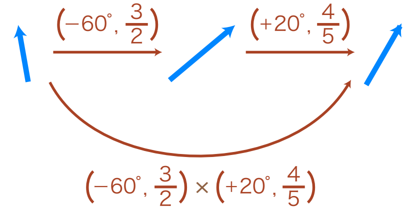
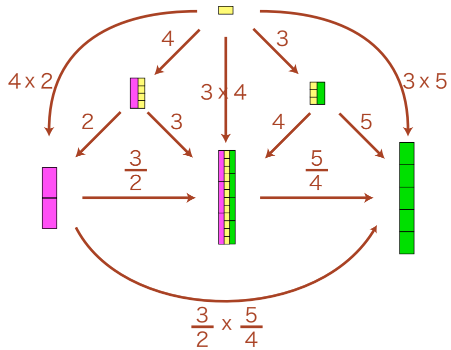
また，「*かけ算の順序なんか，どうでもいいじゃないか！*」の訴えは「×」の文法を知らないところから起こっているわけであるから，「×」の文法もあわせて教えてやらねばならない。

しかし，「×」の文法を説明するためには，

「そもそも＋，× とは‥‥」
「そもそも数とは‥‥」

のそもそも論から始めねばならず，これをやると相手を退かせてしまうこと必定である。
実際，「そもそも数とは？」の論は，つぎの表にあるくらいの分量になる。したがって，巷の談義としてはできない感じになる。――ここが，難儀なところである。

	自 然 数	分　数	正 負 の 数	複 素 数
量 普遍対象	「個数」――普遍対象として「●」 	「線分」 が普遍対象になる量 	「直線上の移動 (1次元ベクトル)」 が普遍対象になる量 (「正逆2方向の量」) 	「平面上の移動 (2次元ベクトル)」 が普遍対象になる量 
量の和 量の和の表現に使う記号「＋」	 	 	 	
量の比 → 数	 (「個数・自然数」は 「量・数」として特殊過ぎて, 「比」の解釈が不自然になる)	 	 	(2つの表現方法) 
倍の和 記号＋  量1 と 量2 の和	 	 	 	
求和の ロジック アルゴリズム 公式	 	 $\frac{n}{m}+\frac{q}{p}=\frac{n\times p+m\times q}{m\times p}$	(±, m) ＋ (±, n) = (±, m+n) (+, m) ＋ (−, n) = (+, m−n)　(m ≧ n) (+, m) ＋ (−, n) = (−, n−m)　(m ≦ n)	 (a+b i) ＋ (c+d i) = (a+c)+(b+d) i

倍の合成 (倍の倍) 記号x 				
求積の ロジック アルゴリズム 公式	$2\times 3 = \overset{3}{\overbrace{(2+2)+2}}$	 $\frac{n}{m}\times\frac{q}{p} = \frac{n\times q}{m\times p}$	$(\pm, m)\times(\pm, n) = (+, m\times n)$ $(+, m)\times(-, n) = (-, m\times n)$	$(\theta_1, r_1)\times(\theta_2, r_2)$ $= (\theta_1+\theta_2, r_1\times r_2)$

2.「かけ算の順序」の数学

2.1　数学における「数と量」の範疇

「*かけ算の順序なんかどうでもいい！*」の素人論は，「*数学でも，かけ算の順序はどうでもいい！*」に転じてくると、具合のわるいものになる。
かけ算の順序は，数学では肝心なことである。

「*数学でも，かけ算の順序はどうでもいい！*」は，「×」の意味の無知にさらに＜生かじりの数学＞が加わって出てくることばである。
そこで＜生かじりの数学＞に警戒心を持ってもらうために，「×」が同一の意味をもつところの「数」の数学がどの程度の拡がりをもった領域であるかを，ここで示すことにする。
きわめて専門的な内容になるが，ここの趣旨は，領域の拡がりを鳥瞰することで，自然数の「×」に棲む「井の中の蛙」を意識的に脱していようということである。

　註：この内容については，つぎのテクストにあたられたい：
　　『「数とは何か？」への答え』

さて，ここで問題になっている「×」は，＜数を量計算に使う＞が文脈になっている。ところで，数学の「量」は形式である。この形式を，数を素材にしてつくる。この意味で，数が量をつくる。(→『「数とは何か？」への答え』)

実際，数学では，量のカテゴリー区分：

		離散	順序稠密	完備
構成素	大きさ	○	○	○
	大きさと１次元方向	○	○	○
	大きさと２次元方向			○
	大きさと４次元方向			○

を実現するようにして，数が構築されている：

$$
\begin{tikzcd}
\text{自然数}(\mathbb{N},+,\times) \arrow[d] & & \\
\text{整数}(\mathbb{Z},+,\times) \arrow[r] & \text{有理数}(\mathbb{Q},+,\times) \arrow[r] & \text{実数}(\mathbb{R},+,\times) \arrow[d] \\
& & \text{複素数}(\mathbb{C},+,\times) \arrow[d] \\
& & \text{四元数}(\mathbb{H},+,\times)
\end{tikzcd}
$$

すなわち，上記の量のカテゴリー区分と（数から構成した）量形式の対応が，つぎのようになる：

		離散	順序稠密	完備
構成素	大きさ	$((\mathbb{N},+),\times,(\mathbb{N},+,\times))$	$((\mathbb{Q}^+,+),\times,(\mathbb{Q}^+,+,\times))$	$((\mathbb{R}^+,+),\times,(\mathbb{R}^+,+,\times))$
	大きさと１次元方向	$((\mathbb{Z},+),\times,(\mathbb{Z},+,\times))$	$((\mathbb{Q},+),\times,(\mathbb{Q},+,\times))$	$((\mathbb{R},+),\times,(\mathbb{R},+,\times))$
	大きさと２次元方向			$((\mathbb{C},+),\times,(\mathbb{C},+,\times))$
	大きさと４次元方向			$((\mathbb{H},+),\times,(\mathbb{H},+,\times))$

例えば，「一皿２つのリンゴが３皿」は，このうちの「離散―大きさ」のカテゴリーでやっていることになる。

四元数では，積が可換でなくなる。
四元数の後には，八元数・十六元数の流れがあるが，これらの数では，積が結合的でなくなる。そして，「結合的でない」は，「量をもてない」を意味する。
(→『「数とは何か？」への答え』)：

2.2　積の立式の論理 ――「順序はどうでもいいのでは？」への答え

以下，「*順序はどうでもいいのでは？*」の問い / 訴えに対する答え方を示す。
答えは，「*それが数学の話なら，順序が問題になる。*」である。
そして，積の立式の論理を示すことが，問いに答えるということになる。

先ず，「そもそも数とは？」から始めねばならない。
再度「そもそも数とは？」の表を鳥瞰されたい。

このように，数は量に対する「倍作用素」としてつくられていることになる。
量のいろいろに応じて，いろいろな数がつくられる。
ここで「量のいろいろ」をいうときの「量」は，生活感覚の「量」とは違ってくる。

「積 (×)」はつぎのように定義される：

> 量 **q** をm倍し，さらにこれを n 倍したら，もとの **q** の何倍になっているか？
> この倍を，「m × n」と書くことにする。

$$\begin{tikzcd} q \arrow[r, "m"] \arrow[rr, bend right, "m \times n"'] & q' \arrow[r, "n"] & q'' \end{tikzcd}$$

倍を記号「×」で表すことにして，式を使って言い換えれば，この定義はつぎのようになる：

$$((q \times m) \times n) = q \times k \quad \text{となる } k \text{ を，}$$

「m × n」で表すことにする。

「*それが数学の話なら，順序が問題になる*」というのは，「積」の定義で「m × n」を書くことは同時に２数の順序を定めていることになり，そして端的につぎの事実が存在するからである：

このように定義した「積」では，一般に交換法則が成り立たない。

実際，複素数からさらに進んだ四元数になると，積の交換法則が成り立たない。

「積」の定義で一旦定めた２数の並ぶ順序が「実用上自由にしてよい」となるためには，この定義の後に「積の可換性」が定理として証明されねばならない。
ところで，複素数までの「数」については「積の可換性」が成り立つ。
そこで，「*順序はどうでもいいのでは？*」の言も出てくるようになるというわけである。

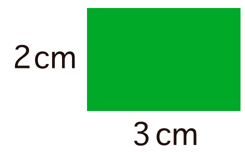
「*順序はどうでもいいのでは？*」は，規範論と実用論をいっしょくたにしていることになる。
数学は，規範を構築する論理ゲームである。
「実用論」は，このゲームの結果を回収したところでが出てくる。これは数学の埒外ということになる。

2.3　立式は，問題の論理的還元の仕方に従う

量の問題は，「問題の論理的還元のステップを進める」という形で解くことになる。
積の立式は，このプロセスの中で現れてくる。
そしてこの場合，問題をどう構造化したかで，積の立式での２数の並ぶ順序が自ずと決まる。

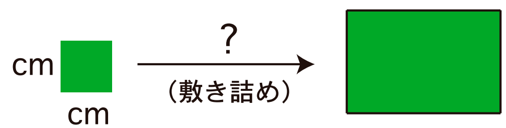
例：長方形の面積計算

ここに，隣り合う２辺の長さが２cm と３cm の長方形がある：

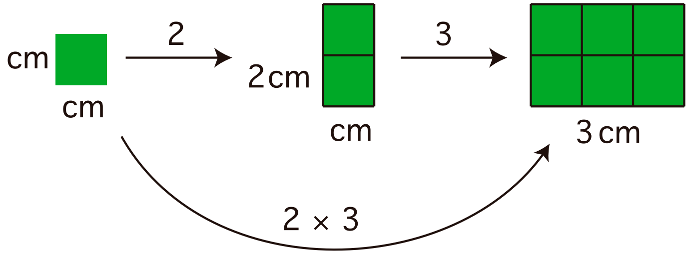


これの面積を，$(2 \times 3)\mathrm{cm}^2$ とするのと $(3 \times 2)\mathrm{cm}^2$ とするのとでは，問題の還元の仕方が違っている。

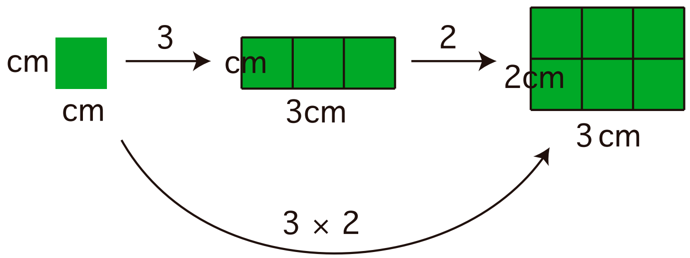
面積を求めるとは，「単位長さ四方の正方形がいくつ入るか」を求めるということである。そして，単位 cm^2 で面積を求めるとは，つぎの敷き詰めを考えることである：



このとき，つぎの倍関係をとらえる：



あるいは



cm^2 を単位とする数値「?」の立式は,

　最初の図の「2倍して3倍」のように構造化したときは,「2× 3」

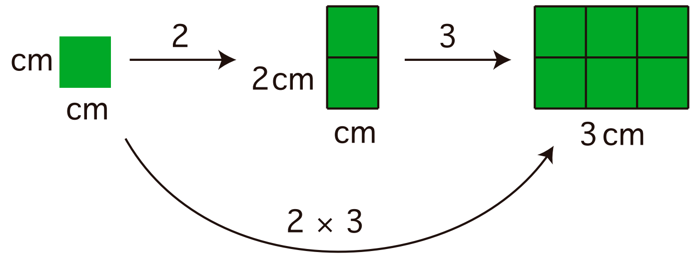
　後の図の「3倍して2倍」のように構造化したときは,「3× 2」

に，それぞれなる。

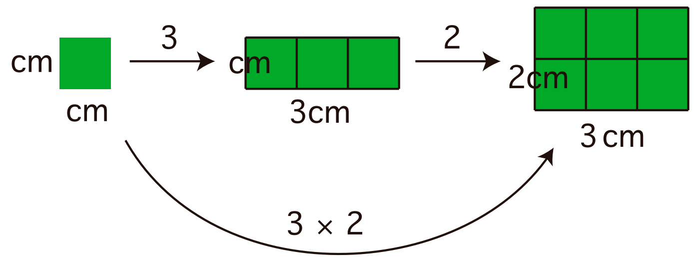
2.4　積の立式における
　＜いろいろ＞と＜ひととおり＞の区別

問題の構造化では，＜いろいろ＞をやる余地がある。
繰り返しになるが，つぎの長方形の面積 (単位 cm^2) を求めるときの立式を例にする：

このときは，つぎの倍関係をとらえる：



あるいは



cm^2 を単位とする数値「?」の立式は，積のきまりに従い，つぎのようになる：

最初の図の「２倍して３倍」のように構造化したときは，
「2× 3」であり，「3× 2」ではない。
後の図の「３倍して２倍」のように構造化したときは，
「3× 2」であり，「2× 3」ではない。

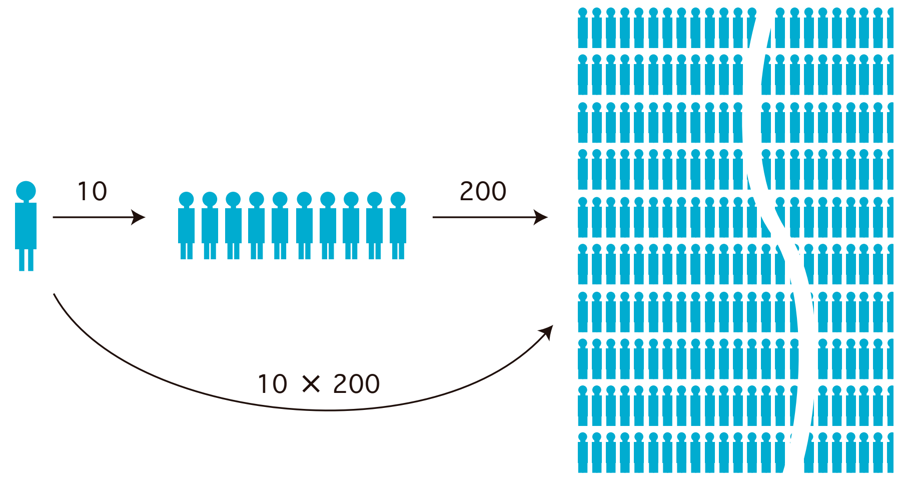
この例では，問題の構造化の仕方を２通り示した。このように，問題の構造化では，＜いろいろ＞をやる余地がある。

しかし，構造化された問題から導かれる２数の積の式は，＜ひととおり＞である。２数を並べる順序に，＜いろいろ＞の余地はない。

つぎの問題を考えよう：

入場を待つ人が並んでいる。
10 人ずつ区切って入場させた。
200 回目で全部を入場させることができた。
入場者の数は，10 と 200 の２数の積で求められる。
その積の式は？

積の立式は「倍の合成 (倍の倍)」の構造から導かれるわけだが，この問題での「倍の合成」構造の自然なとらえ方は，つぎのものである：



そして，この構造化に応ずる積の立式は「10 × 200」である。

10 と 200 の順序をこれとは逆にした「200 × 10」の立式を導くためには，「200 倍して 10 倍する」の構造図を描かねばならないが，これを描くときは相当屁理屈をこねることになる。
(→ § 逆立式の論理)

つまり，問題から「倍の合成」の構造を導くときには＜いろいろ＞の余地があるが, 問題によって,「*どちらをやっても五分五分である*」とか「*この構造化はいかにも無理がある*」といったことが起こってくる。

2.5　逆立式の論理

「問題の論理的還元」「積の論理」の概念がないと，立式を「結果オーライであればよいもの」としてやってしまう。そして，２数の順序を逆転した式を立ててしまう。

逆立式を合理化しようとすると，ひどくひねくれた論理を作為しなければならない。この「ひねくれた論理」を，ここで示すことにする。
複雑だが，＜理解＞にトライされたい。

記号表記：
以下の論では，量と数の区別が重要になる。特に，つぎのふたつの区別が重要となる：

- ２数mとｎに関する「mとｎの積」
- 量**q**と数ｎに関する「**q**のｎ倍」

そこで，この２つの区別がつきやすいように，つぎの表記を用いる：

- ２数mとｎの積を，「m × n」で表す。
- 量**q**と数ｎに関する「**q**のｎ倍」を，「**q** × n」で表す。

また，「２個」「２cm」のように，数と量を直接くっつけた日常表現も以下で使う（式の中では緑色で表す）ので，注意されたい。 ——「２個」「２cm」は，「個 × ２」「cm × ２」と分析されるところのものである。

先ず，つぎの問題を考える：

「*飴が２個はいった箱があります。*
３箱のときの飴の個数を求める式は？」

基本は，これを「２個の３倍」の問題ととらえる。そしてこのとき，

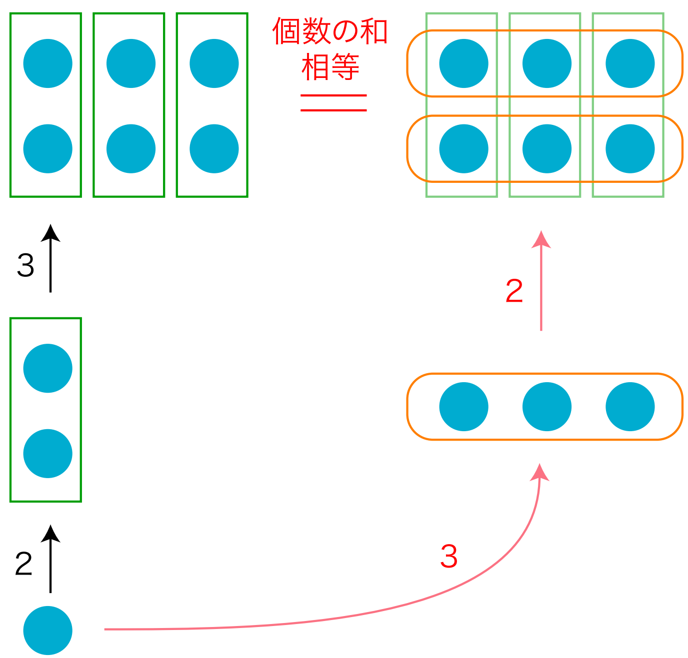
　　２個 × ３
＝（個 × ２）× ３
＝ 個 ×（２× ３）
＝（２× ３）個

となることで，「２× ３」の立式となる。
（最後の「＝」の式変形は，数の「積」の定義そのものである。）

では，逆立式「３× ２」は可能だろうか？
「３× ２」が立式されるとは，最初の問題が「３個の２倍」の問題にとらえられるということである。
そして，つぎのように考えれば，「３個の２倍」の問題にすることができる：

各箱から飴１個を取り出す。
（箱は３個なので）１回につき飴３個が取り出せる。
（箱の中に飴２個なので）この取り出しは２回行える。
このとき，飴の個数は，３個の２倍。

「２× ３」と「３× ２」の両方が導けたのは，ここでつぎの行列のモデルを使えたことによる：



つぎの問題：

「*2cm のひもがあります。3本つないだ長さを求める式は？*」

基本は，これを「2cm の3倍」の問題ととらえる。そしてこのとき，

$$
\begin{aligned}
& 2\,\mathrm{cm} \times 3 \\
=\ & (\mathrm{cm} \times 2) \times 3 \\
=\ & \mathrm{cm} \times (2 \times 3) \\
=\ & (2 \times 3)\mathrm{cm}
\end{aligned}
$$

となることで，「2× 3」の立式となる。

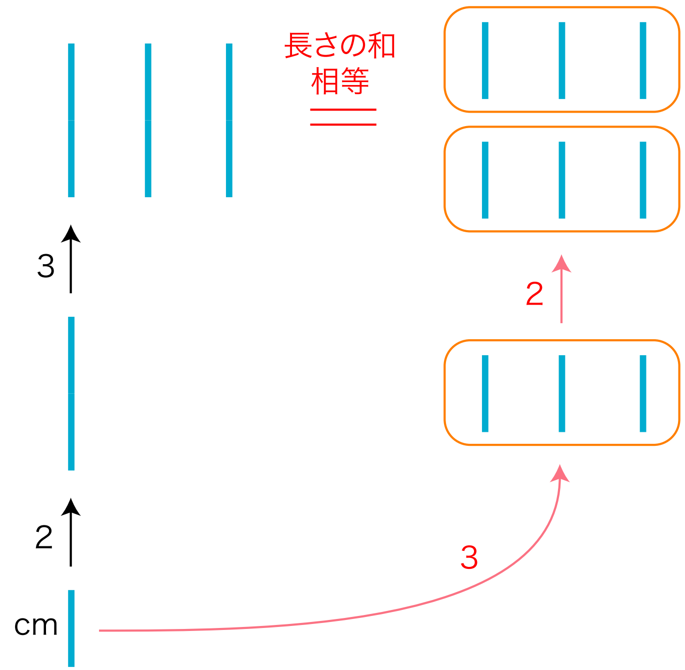
では，逆立式「3× 2」は可能か？

「3× 2」が立式されるとは，最初の問題が「3cm の2倍」の問題にとらえられるということである。

最初の問題を「3cm の2倍」の問題に解釈するには，飴の問題で「飴3個」をつくる工夫をしたときのように，「ひも 3cm」をつくる工夫をしなければならない。そして，「飴3個」のやり方に倣うことになる：

各ひもから 1cm を切り出す。
(ひもは3本なので) 1回につき合計3cm が切り出される。
(ひもは最初 3cm なので) この切り出しは2回行える。
このとき，切り出したひもの合計した長さは，3cm の2倍。

「2× 3」と「3× 2」の両方が導けたのは，「行列」に類比のつぎのモデル（ここでは「線分横並びモデル」と呼ぶことにする）が使えたことによる：



だんだん解釈が苦しくなる問題にしていく：

「*1秒に２度上昇します。３秒では何度上昇？*」

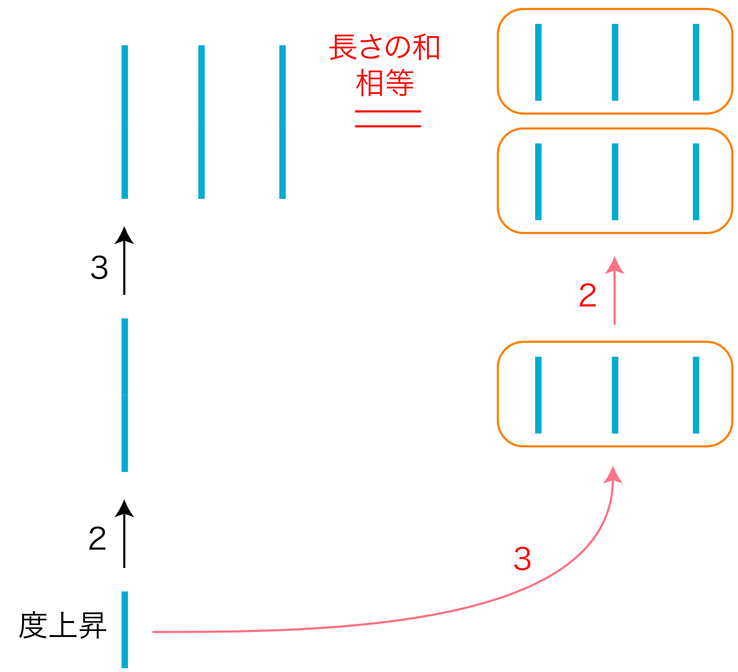
基本は，これを「２度上昇の３倍」の問題ととらえる。そしてこのとき，

２度上昇 × ３
＝ (度上昇 × ２) × ３
＝ 度上昇 × （２× ３）
＝ (２× ３) 度上昇

となることで，「２× ３」の立式となる。

では，逆立式「３× ２」は可能か？
「３× ２」が立式されるとは，最初の問題が「３度上昇の２倍」の問題にとらえられるということである。
「３度上昇」をつくるのに使えるモデルは,「線分横並びモデル」である：

各「２度上昇」から「１度上昇」を切り出す。
(「２度上昇」は３つなので）１回につき合計「３度上昇」が切り出される。
この切り出しは２回行える。
このとき，切り出したものの合計は，３度上昇の２倍。



重要：
この問題に対する「線分横並びモデル」の適用では，「温度上昇」という量と (視覚表現される)「長さ」という量の数学的同型が，暗黙に用いられている。

逆立式の解釈 (屁理屈) に，まだあなたがついて来ているとしよう。

これまでは自然数倍だったが，こんどは有理数倍にする。
つぎの問題：

「*１秒に 1.2 度上昇します。3.4 秒では何度上昇？*」

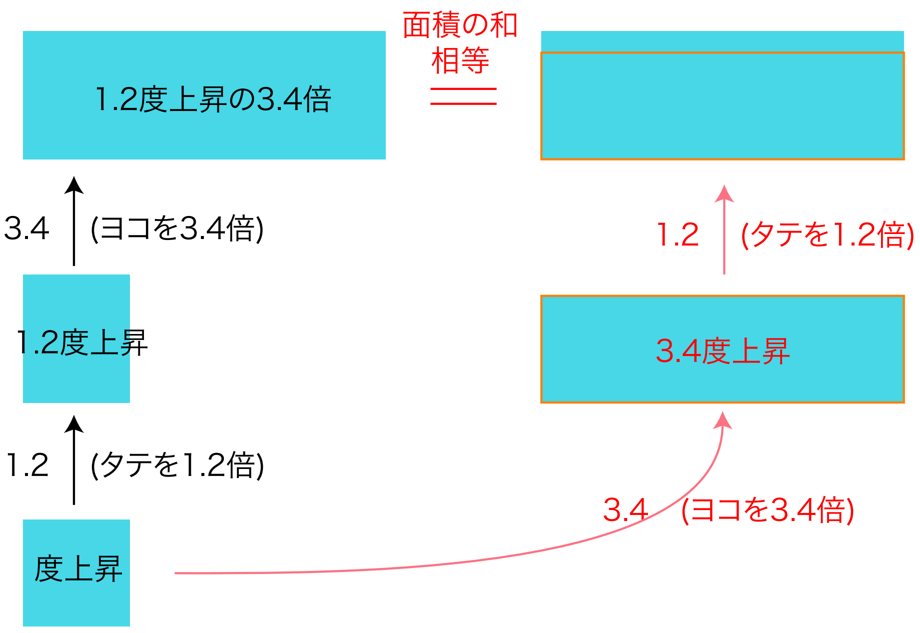
基本は，これを「1.2 度上昇の 3.4 倍」の問題ととらえる。そしてこのとき，

　　1.2 度上昇 × 3.4
　＝ (度上昇 × 1.2) × 3.4
　＝ 度上昇 × (1.2 × 3.4)
　＝ (1.2 × 3.4) 度上昇

となることで，「1.2 × 3.4」の立式となる。

では，逆立式「3.4 ×1.2」は可能か？
「3.4 ×1.2」が立式されるとは，最初の問題が「3.4 度上昇の 1.2 倍」の問題にとらえられるということである。
「3.4 度上昇」をつくるのに，「線分横並びモデル」はもはや使えない。
線分横並びをくっつけたモデル (「タイルモデル」と呼ぶことにする) にしなければならない：

　「1.2 度上昇の 3.4 倍」を，下図のイメージで考える。
　「度上昇の 3.4 倍」を，下図のイメージで考える。
　下図のイメージで,「1.2 度上昇の 3.4 倍」は「度上昇の 3.4 倍」の 1.2 倍。
　「度上昇の 3.4 倍」は「3.4 度上昇」



重要：
この問題に対する「タイルモデル」の適用では，「温度上昇」という量と (視覚表現される)「面積」という量の数学的同型が，暗黙に用いられている。

逆立式の解釈 (屁理屈) に，まだあなたがついて来ているとしよう。

さらに，場面を「空間ベクトルに対する複素数倍」に転じる。
つぎの問題を考える：

　「単位ベクトルの z 倍として表されるベクトルを，w 倍すると？」

基本は，これを「単位ベクトルの z 倍の w倍」の問題ととらえる。そしてこのとき，

(単位ベクトル × z) × w
＝ 単位ベクトル ×（z × w）

となることで，「z × w」の立式となる。

では，逆立式「w × z」は可能か？
タイルモデルは，もはや使えない。
なぜなら，タイルモデルを使うとは，対象にしている量と (視覚表現される)「面積」の数学的同型を立てるということある。
上の問題で倍作用として使う数は複素数であるが，「面積」において倍作用として使う数は実数までである。(この意味で，「面積」は実係数。)
倍作用の数がそもそも異なるという理由で，線分横並びモデル (「長さ」との数学的同型を立てる) も同様に使えない。

これまで使ってきた「モデル」は，「横断」の操作を行えるようにする視覚モデルであった。これらのモデルは，複素数を倍作用素とする量に至っては，使えなくなる。

結論

1. 量の倍の倍の問題に対し数の積を逆立式するときは, 行列モデル, 線分横並びモデル，タイルモデルを使うことになる。
2. これらのモデルの意味は，対象になっている量を２次元の絵に視覚表現 (同型表現) して，その絵の上で「横断」の操作を行うことにある。
3. 線分横並びモデルの適用では，対象にしている量と (視覚表現される)「長さ」の数学的同型が，暗黙に用いられている。
4. タイルモデルの適用では, 対象にしている量と (視覚表現される)「面積」の数学的同型が，暗黙に用いられている。
5. 複素数以上になると，適用できる視覚モデル──「横断」の操作をできるようにするモデル──はなくなる。

数学教育的含意

1. 逆立式では，行列モデル，線分横並びモデル，タイルモデルが使われる。
   数学的主題の学習目標を (「できる」に対する)「わかる」に措くとき，逆立式は, モデル適用の論理の理解を伴うものでなければならない。

   論理の理解を伴わない逆立式は, ，単に「できる」になる。
   この「できる」は，基本の理解の軽視に進んだり，モデルの誤用という誤りをおかしやすくする。

2. この意味では，行列モデルの適用による逆立式は，授業内容にすることが可能。
   ──解釈にひねり / 難しさがあるので，「発展的」という形の扱いになる。

3. 一方，線分横並びモデルあるいはタイルモデルの適用による逆立式は，授業内容にできない。
   実際，その解釈もきわめて無理 (作為的) なものになる。そして，この数学的同型の学習も簡単でない。一般には，大学数学の内容になる。

3. 問題の論理的還元
――例：「3×2」の立式の場合

3.1 「3×2」の立式に至る問題の最終還元形

3.2「3m のひもを 2 本つなぐと，何m？」

3.3「1 ヤードは 3 フィート。2 ヤードは何フィート？」

3.4「タテ 3cm, ヨコ 2cm の長方形の面積は何cm^2 ?」

3.5「3km/h では，2h で移動する距離は何 km ？」

3.0　要旨

ここでは，量計算の問題を実際に解きながら，つぎのことを見ていく：

> 少なくとも算数レベルの量計算問題であれば，「倍の倍」の順序は自ずと定まる。
> これに対応して，かけ算の順序も定まる。
> 逆立式を出すには，そうとう無理なひねくれ方をしなければならない。

3.1「3×2」の立式に至る問題の最終還元形

つぎが，「3× 2」の立式に至る問題の，最終還元形である：

$$\begin{tikzcd} 量_a \arrow[r, "3"] \arrow[rr, bend right, "?"'] & 量_b \arrow[r, "2"] & 量_c \end{tikzcd}$$

この「?」に対して「3× 2」が立式される。

3.2 「3m のひもを 2 本つなぐと，何m？」

数式への還元のステップが，つぎのようになる：

問題	3mの2倍は何mか?
問題を図式化	$3m \xrightarrow{2} \text{何}m$
「3m」と「何m」を分析	$\begin{tikzcd} m \arrow[r, "3"] \arrow[rr, bend right, "\text{何}"'] & 3m \arrow[r, "2"] & \text{何}m \end{tikzcd}$
「×」の文法	$\begin{tikzcd} m \arrow[r, "3"] \arrow[rr, bend right, "\text{何} = 3 \times 2"'] & 3m \arrow[r, "2"] & \text{何}m \end{tikzcd}$

3.3 「1 ヤードは 3 フィート。2 ヤードは何フィート？」

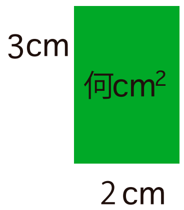
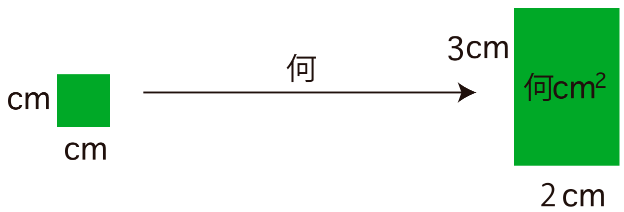
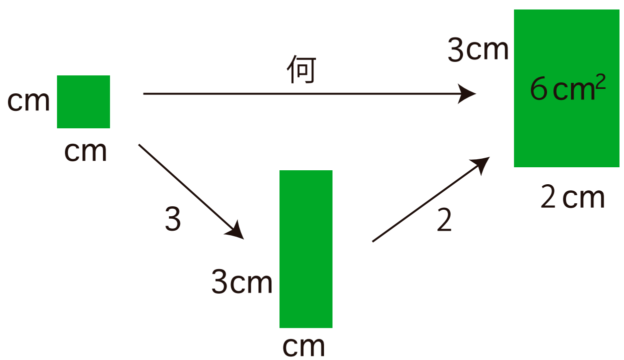
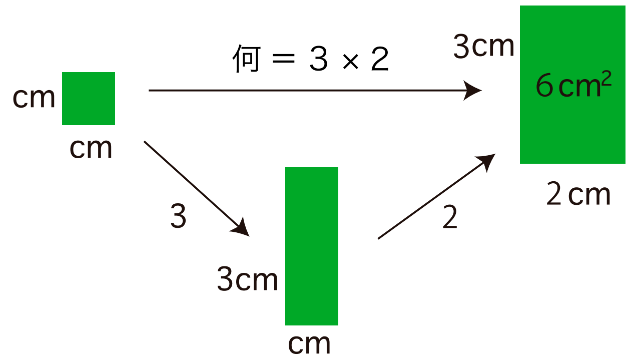
数式への還元のステップが，つぎのようになる：

問題	ヤードの2倍は何フィートか?
問題を図式化	$\text{ヤード} \xrightarrow{2} \text{何フィート}$
「ヤード」と「何フィート」を分析	$\begin{tikzcd} \text{フット} \arrow[r, "3"] \arrow[rr, bend right, "\text{何}"'] & \text{ヤード} \arrow[r, "2"] & \text{何フィート} \end{tikzcd}$
「×」の文法	$\begin{tikzcd} \text{フット} \arrow[r, "3"] \arrow[rr, bend right, "\text{何} = 3 \times 2"'] & \text{ヤード} \arrow[r, "2"] & \text{6フィート} \end{tikzcd}$

3.4　「タテ 3cm, ヨコ 2cm の長方形の面積は何 cm^2 ?」

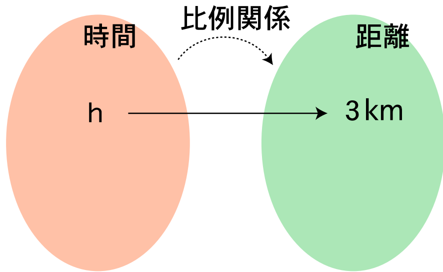
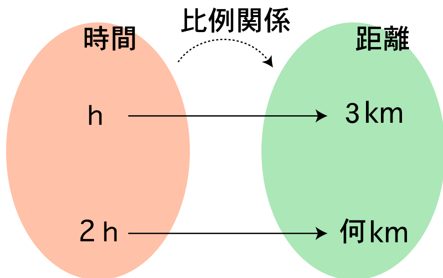
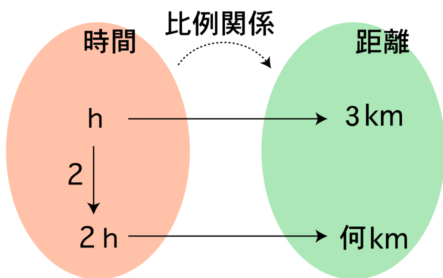
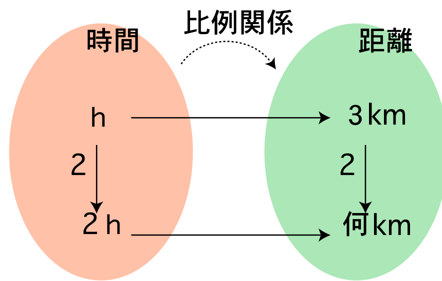
ここでは，つぎのことを使う：

（＊）「隣り合う２辺の一方の辺の長さを固定したとき，
他方の辺の長さと面積は比例関係にある。」

問題	タテの長さ3cm とヨコの長さ2cm で， 面積が何cm^2 か?
問題を図式化	
「何cm^2」 を分析	
(∗) の適用 （「3×2」の 立式になる 場合）	
「×」の文法	

3.5　「3km/h では，2h で移動する距離は何 km ？」

数式への還元のステップが，つぎのようになる：

問題	3km/h では2hで何km?	
問題を図式化	「3km/h」の含意	
	「2hで何km?」を書く	
「比例関係」の適用	「2h」を分析	
	一方の2倍に他方の2倍が対応	
倍関係の問題として解く	倍関係の問題としてスタート	$3\text{km} \xrightarrow{2} \text{何km}$
	「3km」「何km」を分析	$\begin{tikzcd} \text{km} \arrow[r, "3"] \arrow[rr, bend right, "\text{何}"'] & 3\text{km} \arrow[r, "2"] & \text{何km} \end{tikzcd}$
	「×」の文法	$\begin{tikzcd} \text{km} \arrow[r, "3"] \arrow[rr, bend right, "\text{何}=3\times2"'] & 3\text{km} \arrow[r, "2"] & \text{何km} \end{tikzcd}$

4.　学校数学における
「かけ算の順序」の主題の意味

4.1　学校数学では,「順序」を大事にすること

思いつきで「かけ算の順序」を語るのは,「かけ算の順序」が数学であることを知らないためである。「かけ算の順序」が数学だということを言われれば, 自分はその数学を知らないわけだから,「かけ算の順序」は思いつきでは語れないものになる。

学校数学では,「かけ算の順序」を大事にすること。
「かけ算には順序がある」が, 数学であるからだ。

学校数学に対し数学を強調することは, 重要である。
なぜなら, 学校数学は自ら数学を貧困にするふうになっているからである。
すなわち,「わかる (what･why)」がないがしろにされ,「できる (how)」がゴールになってしまう。「できる」が「わかっていない」を隠蔽するぐあいになってしまう。

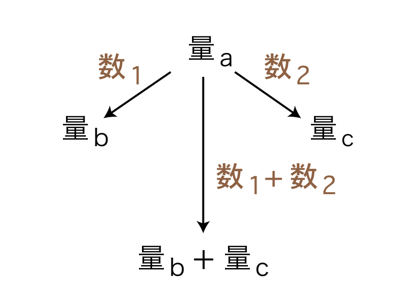
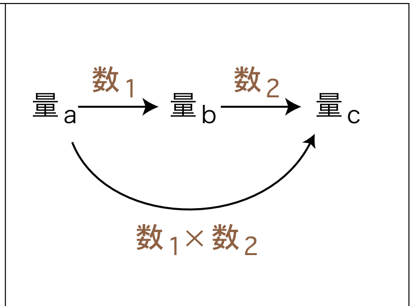
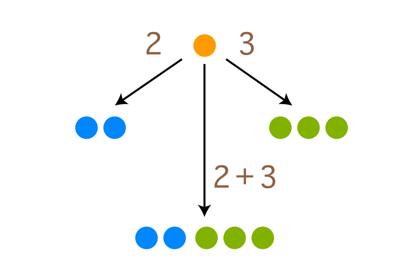
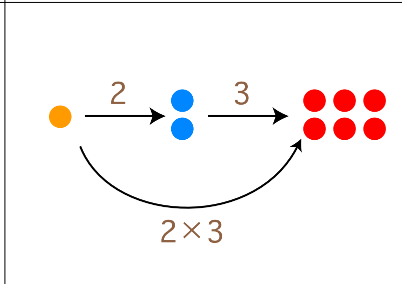
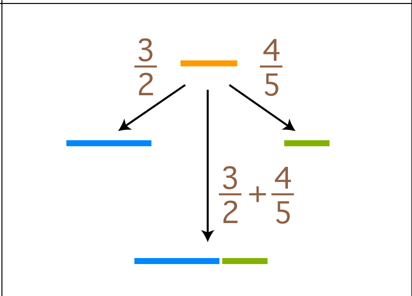
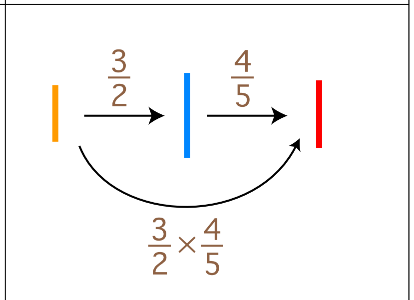
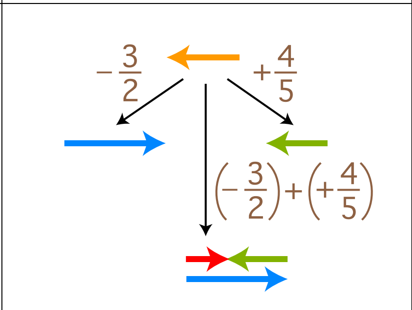
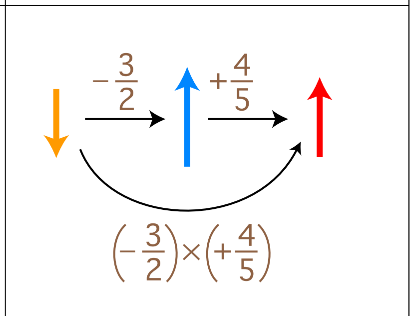
「わかる (what･why)」と「できる (how)」の相互対置は, 規範論 (what･why) と実用論 (how) の相互対置である。
数学は, 規範論である。
実用論を理解することは, 規範論を理解することである。
「かけ算の順序」論議 / 論争の中のモンスターには, 実用論タイプがあって, これは規範論の概念をもっていないことで「モンスター」になっている。規範論を一方に措かない実用論は, そもそも実用論ではないわけである。

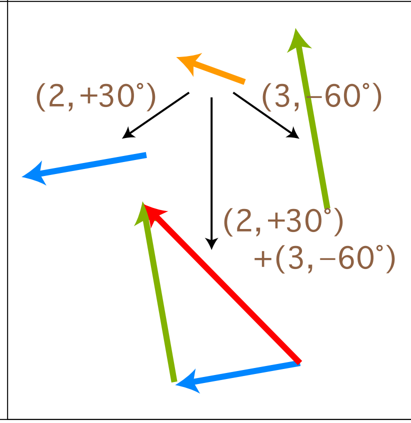
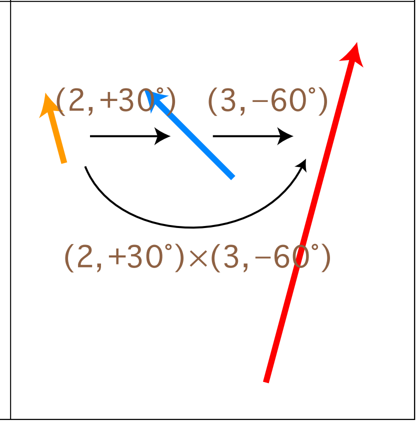
4.2「問題の論理的還元」は, 学校数学の必須主題

量計算の問題は,「問題の論理的還元のステップを進める」という形で解くことになる。
積の立式は, このプロセスの中で現れてくる。
そしてこの場合, 問題をどう構造化したかで, 積の立式での２数の並ぶ順序が自ずと決まる。

積の立式で学校数学が大事にしなければならないのは, 生徒が「計算結果が答と合う式を, ノウハウや形式感覚でつくれるようになる」ではない。「問題から数の計算式を導く論理的還元 (推理) が, できるようになる」である。
そこで, 学校数学の場合は「かけ算の順序」が重要になる。 ――「順序」をどうでもいいことにしたら,「*学校数学は何をやるのか？*」という問題になる。

数学教育を志す者なら,「順序」の問題を「問題の論理的還元」の問題としてとらえられないというのは, 困る。
そこで, 最初に, 数の積の立式の構造をきちんと理解することに努められたい。(次頁)
そして,「問題の論理的還元」を努めて練習されたい。(→ § 問題の論理的還元――例 :「3× 2」の立式の場合)

		
自然数		
分数		
正負の数		

複素数		

おわりに

本論考の目的は,「かけ算の順序」の数学を示すことである。そして趣旨は,「かけ算の順序」の数学を押さえておきたいという人が出てきたときに, これに応えられるようにしておこうということである。——これだけである。

特に ,「かけ算の順序」論議 / 論争に口をはさむ意図はない。
実際 ,「かけ算の順序」の日常感覚論議は, 重要である。
これを大いにやり数学を反照的に考えられるようになってはじめて, 数学の特異な位置・あり方が見えてくるようになる。

註：本論考は，つぎのサイトで継続される (これの進行に応じて本書を適宜更新する)：

http://m-ac.jp/me/instruction/subjects/number/composition/math/

宮 下 英 明 (みやした ひであき)

1949 年，北海道生まれ。東京教育大学理学部数学科卒業。筑波大学博士課程数学研究科単位取得満期退学。理学修士。金沢大学教育学部助教授を経て，現在，北海道教育大学教育学部教授。数学教育が専門。

図解　現職教員・教員養成コース学生＆数をわかりたい人のための
「かけ算の順序」論争がわかる本 (3)

「かけ算の順序」の数学

2010-03-30　初版アップロード (サーバー：m.iwa.hokkyodai.ac.jp)
2010-05-28　サーバー変更 (m-ac.jp)
2011-01-29　これまでの『「かけ算の順序」の数学』を, 本テクストと『「かけ算の順序」のイデオロギー』に分冊
2012-04-22　更新

著者・サーバ運営者　宮下英明

サーバ　m-ac.jp

http://m-ac.jp/
m@m-ac.jp